LE DEUXIÈME DEGRÉ

I. Les fonctions polynomiales du deuxième degré

Définition 1

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est **fonction polynomiale du deuxième degré** s'il existe des nombres réels $a \neq 0$, b et c tels que f admette pour expression :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ pour tout nombre réel } x$$

La fonction polynomiale f est présentée ici sous **sa forme développée**.
On peut parler aussi de trinôme du deuxième degré.
a est appelé **le coefficient dominant** de la fonction f et c **le coefficient constant.**

Exemple 1

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions f, g et h par :
$f(x) = -3x^2 + 2x + 5$, $g(x) = (2x+1)^2 - 6$ et $h(x) = 4 - x^2$.

- f est une fonction polynomiale du deuxième degré avec $a = -3$, $b = 2$ et $c = 5$.
- On développe l'expression de $g(x)$: $g(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 6 = 4x^2 + 4x - 5$.
  g est une fonction polynomiale du deuxième degré avec $a = 4$, $b = 4$ et $c = -5$.
- h est une fonction polynomiale du deuxième degré avec $a = -1$, $b = 0$ et $c = 4$.

Proposition 1

La courbe représentative d'une fonction polynomiale du deuxième degré est une parabole. On note a son coefficient dominant.

- Si $a < 0$, la parabole a « les branches vers le bas ».
- Si $a > 0$, la parabole a « les branches vers le haut ».

II. La fonction carré

Définition 2

On considère a un nombre réel. **Le carré du nombre** a, noté a^2 est le produit de a par lui-même.
Ainsi, $a^2 = a \times a$.

Proposition 2 : propriétés du carré

Pour tous nombres réels a et b,

- $a^2 \geqslant 0$;
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;
- $(ab)^2 = a^2b^2$.

Proposition 3 : définition et propriété de la racine carrée

- Pour un nombre réel positif a, **la racine carrée de** a est l'unique nombre positif solution de l'équation $X^2 = a$. Ainsi, si a est positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.
- Pour a et b deux nombres positifs, on a la relation $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
  En particulier, $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Pour a un nombre réel strictement positif, on a la relation $\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Proposition 4

On considère a un nombre réel ou une expression.
L'équation $X^2 = a$, d'inconnue X, possède :

- aucune solution si $a < 0$: $S = \varnothing$;
- deux solutions si $a \geqslant 0$: $S = \left\{\sqrt{a} ; -\sqrt{a}\right\}$ (solutions confondues si $a = 0$).

Exemple 2

Résoudre l'équation $(x-1)^2 = 6$. Comme $6 > 0$, on en déduit que $x - 1 = \sqrt{6}$ ou $x - 1 = -\sqrt{6}$, d'où $x = -1 + \sqrt{6}$ ou $x = -1 - \sqrt{6}$.
$S = \left\{-1 + \sqrt{6} ; -1 - \sqrt{6}\right\}$.

Définition 3

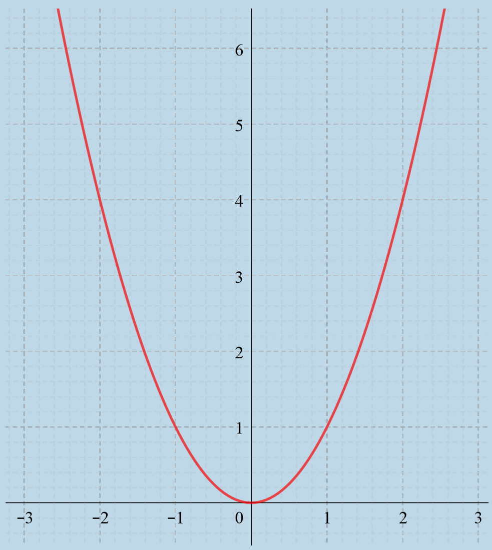
La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$.

Proposition 5

La courbe représentative de la fonction carrée est une **parabole** qui possède un sommet de coordonnées $(0 ; 0)$ et qui admet la droite d'équation $x = 0$ comme axe de symétrie.
La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variations de f		↘	0	↗	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$+$	



Proposition 6 : conséquence des variations de la fonction carrée

- Pour tous nombres réels a et b négatifs, si $a < b$, alors $a^2 > b^2$.
- Pour tous nombres réels a et b positifs, si $a < b$, alors $a^2 < b^2$.

III. Forme canonique et variations

Proposition 7

f est une fonction polynomiale du deuxième degré, d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha)$$

La fonction polynomiale f est présentée ici sous **sa forme canonique**.

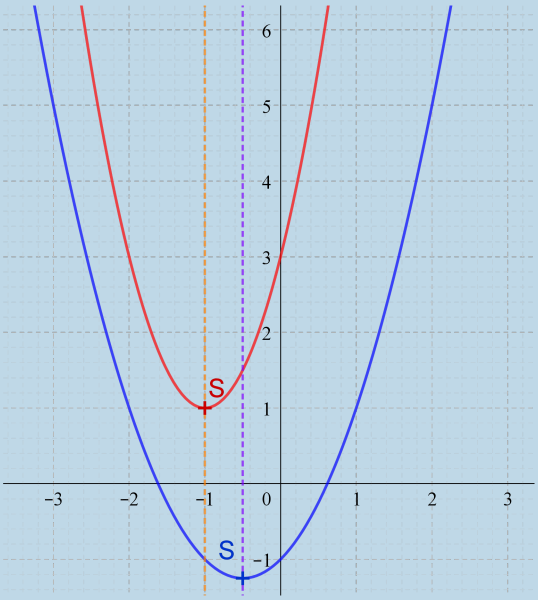
Proposition 8

On considère une fonction polynomiale du deuxième degré d'expression canonique :
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

- Si $a > 0$, f admet le tableau de variations :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	↘	β	↗

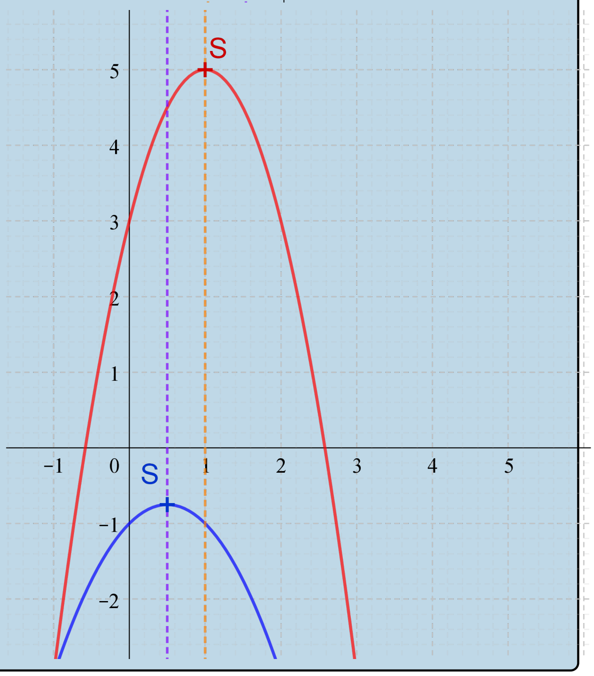
En outre, la courbe représentative de f est **une parabole** « avec les branches vers le haut ».
Elle admet pour sommet le point $S(\alpha;\beta)$ et la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie.



- $a < 0$, f admet le tableau de variations :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Variations de f	↗	β	↘

En outre, la courbe représentative de f est **une parabole** « avec les branches vers le bas ».
Elle admet pour sommet le point $S(\alpha;\beta)$ et la droite d'équation $x = \alpha$ comme axe de symétrie.



Exercice 1

Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto -3x^2 + 5x - 1$.