CHAPITRE 3

PRODUIT SCALAIRE

I. Propriétés du produit scalaire

Définition 1

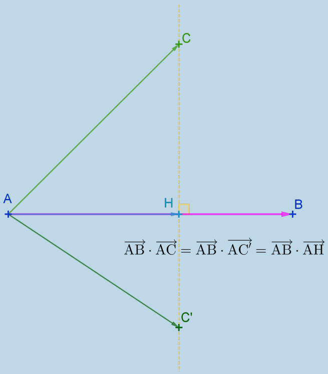
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan et A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right) = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
Cas particuliers :

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\widehat{BAC} = 90°$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$;
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$;
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens opposés, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Proposition 1 : définitions alternatives & équivalentes au produit scalaire

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$.
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right] = \frac{1}{4}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right]$.



Proposition 2

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs et λ un nombre réel. Alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (symétrie du produit scalaire).
- $\vec{u} \cdot \left(\lambda\vec{v}\right) = \lambda \times \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$.
- $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Définition 2

On considère $\vec{u}$ un vecteur. Le nombre $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire du vecteur $\vec{u}$**.
On le note $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

N.B. : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2$.

Proposition 3

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs. Alors :

- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$.
- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

II. Lien avec l'orthogonalité

Définition 3

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Proposition 4

Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$.

Définition 4

Un vecteur normal à une droite est un vecteur non nul orthogonal à un vecteur de la droite.

Proposition 5

$\mathscr{D}$ est la droite d'équation : $ax + by + c = 0$.

Un vecteur normal de $\mathscr{D}$ est $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Proposition 6

Toute droite admettant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ comme vecteur normal admet une équation $ax + by + c = 0$.

III. Calculs de longueurs, de mesures d'angle

Théorème 1 : Formules d'AL-KASHI

Pour un triangle ABC, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\widehat{A}\right) \quad \Big| \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\left(\widehat{B}\right) \quad \Big| \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\widehat{C}\right)$$

Remarque : Ce théorème est une généralisation du théorème de PYTHAGORE à des triangles non nécessairement rectangles.

Proposition 7 : Formules de la médiane

A et B sont deux points du plan et I est le milieu du segment [AB].
Pour tout point M du plan, on a

- $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$;
- $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM}$.

Théorème 2 : Loi des sinus

Pour un triangle ABC, on a

$$\frac{BC}{\sin\left(\widehat{A}\right)} = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{B}\right)} = \frac{AB}{\sin\left(\widehat{C}\right)}$$