CHAPITRE 1

MODES DE GÉNÉRATION D'UNE SUITE

I. Suites, génération explicite

Définition 1

- Une **suite numérique** u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  On peut noter alors noter cette suite u ou (u_n)
- Pour un nombre entier n, le nombre réel $u(n)$, image de n par u, est noté u_n et est le **terme d'indice** n.
- Une suite correspond à une liste ordonnée de nombres réels que l'on peut énumérer et sert ainsi à modéliser les **phénomènes discrets** [1].

Définition 2

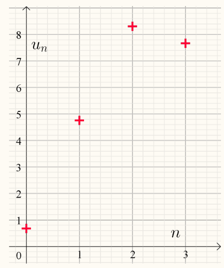
- Pour une suite (u_n) et un nombre entier n,
  - $*$ le terme qui suit u_n est u_{n+1} ;
  - $*$ pour $n \geqslant 1$, le terme qui précède u_n est u_{n-1}.
- Une suite est représentée par **un nuage de points** de coordonnées $(n\,;u_n)$.

Exemple 1

Jean-Kévin mesure la masse [2] les tomates qu'il a cultivées et ramassées chaque semaine.

Numéro de la semaine n	0	1	2	3
Masse des tomates (kg) u_n	0,68	4,76	8,31	7,67

Le premier terme est u_0 et vaut 0,68 kg et le troisième terme est $u_2 = 8{,}31$ kg.



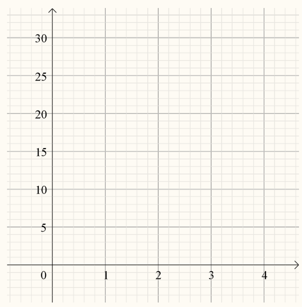
Définition 3

Une suite (u_n) est définie **de manière explicite** lorsque pour tout nombre entier n, le nombre u_n est donné en fonction du nombre n.

Exemple 2

La suite (v_n) est définie par $v_n = 7n - 5$.
Le deuxième terme de cette suite vaut $v_1 = 7 \times 1 - 5 = 2$.
On peut exprimer v_{n+1} :
$v_{n+1} = 7(n+1) - 5 = 7n + 7 - 5 = 7n + 2$.
L'entrée de cet algorithme est un nombre entier n et sortie est le nombre réel v.

$\boxed{v \leftarrow 7n - 5}$



Exercice 1

(v_n) est la suite d'expression $v_n = 7n - 5$.

1. Calculer le terme d'indice 2 et le 100e terme.
2. Représenter la suite (v_n).

1. Discret signifie ici « que l'on peut énumérer », *i.e.* on peut compter les données en comptant avec des nombres entiers.
2. Pour éviter le malheureux abus de langage : « mesure la masse ».

II. Suites, génération récurrente

Définition 4

Une suite (u_n) est définie de manière récurrente par la donnée :

- du premier terme u_0 ;
- d'une relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n, appelée **relation de récurrence**.

Exemple 3

La suite (g_n) est définie par $\begin{cases} g_0 = 2 \\ g_{n+1} = 0{,}7g_n \end{cases}$.

Le deuxième terme vaut : $g_1 = 0{,}7g_0 = 0{,}7 \times 2 = 1{,}4$.

L'entrée de cet algorithme est un nombre entier $n \geqslant 1$ et sortie est le nombre réel g.

$g \leftarrow 2$
Pour k allant de 1 à n
  $g \leftarrow 0{,}7g$

```
def g(n):
    g = 2
    for k in range(n):
        g = 0.7 * g
    return g
```

Exercice 2

La suite (g_n) est définie par $\begin{cases} g_0 = 2 \\ g_{n+1} = 0{,}7g_n \end{cases}$.

1. Calculer g_3.
2. Donner une valeur approchée de g_{20}.

Exemple 4

Un patient prend 2 g de paracétamol ; chaque heure, le corps élimine 30 % de la masse de paracétamol présente en lui. La suite (g_n) modélise la masse restante dans le corps du patient :

- à l'origine des temps $n = 0$, la masse est de $g_0 = 2$ g ;
- la relation $g_{n+1} = 0{,}7g_n$ symbolise qu'entre deux heures consécutives, la masse a diminué de 30 % [3].

Exercice 3

Une information est connue par 100 personnes. Pendant 36 heures, chaque heure, la diffusion de cette information induit que le nombres de personnes en possession de cette information augmente de 50 %.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite définie de manière récurrente : donner son premier terme et une relation de récurrence.
2. Combien de personnes seront au courant au bout d'une journée ?

3. Diminuer de 30 % revient à multiplier par le coefficient multiplicateur $1 - 30\,\% = 0{,}7$.

III. Sens de variation

Définition 5

p est un nombre entier naturel.

- Une suite (u_n) est **croissante** à partir de l'indice p si pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant p$, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
- Une suite (u_n) est **décroissante** à partir de l'indice p si pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant p$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite **monotone** à partir de l'indice p est soit croissante à partir de l'indice p , soit non décroissante à partir de l'indice p .
- Une suite **non monotone** à partir de l'indice p est une suite qui n'est ni croissante, ni décroissante à partir de l'indice p .

Exemple 5

Pour la suite (v_n) définie par $v_n = 7n - 5$, on a vu que $v_{n+1} = 7n + 2$.
Ainsi, $v_{n+1} - v_n = (7n + 2) - (7n - 5) = 7$ et donc $v_{n+1} - v_n > 0$.
La suite (v_n) est strictement croissante.

Exemple 6

La suite de terme général $a_n = (-1)^n$ est non monotone.
En effet, $a_0 = a_2 = 1$ et $a_1 = -1$: on a donc $a_0 > a_1$ et $a_1 < a_2$.

Proposition 1

Si une suite est définie de manière explicite, on peut noter $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$.
Si la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors la suite (u_n) est croissante. De même pour le cas décroissance.

Exercice 4

Étudier le sens de variation de la suite de terme général $b_n = 0{,}5n + 2$.

Proposition 2

p est un nombre entier naturel et (u_n) est une suite strictement positive, *i.e.* telle que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$,

- si pour tout $n \geqslant p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est croissante à partir de l'indice p ;
- si pour tout $n \geqslant p$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir de l'indice p.

Exercice 5

Étudier le sens de variation de la suite de terme général $q_n = \frac{1}{2n+7}$.