Chapitre 10

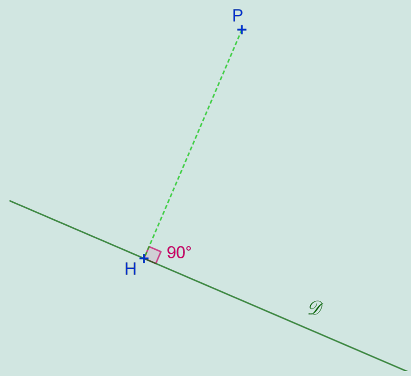
Géométrie repérée

I. Projeté orthogonal

Définition 1

Pour un point P et une droite $\mathscr{D}$, si $P \notin \mathscr{D}$, **le projeté orthogonal de** P **sur** $\mathscr{D}$ est l'unique point H tel que $\begin{cases} H \in \mathscr{D} \\ (PH) \perp \mathscr{D} \end{cases}$.

La distance de P **à** $\mathscr{D}$ est alors la distance PH et on la note $d(P, \mathscr{D})$.



Exemple 1

La droite Δ a pour équation $2x - y + 3 = 0$ et $M(-1\,;6)$ et $H(1\,;5)$ sont deux points (repère orthonormé).
M n'appartient pas à Δ car ses coordonnées ne vérifient pas l'équation de Δ : $2 \times (-1) - 6 + 3 = -5 \neq 0$.
H est le projeté orthogonal de M sur Δ car :

- $H \in \Delta$: $2 \times 1 - 5 + 3 = 0$;
- $(MH) \perp \Delta$: $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Δ et $\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{MH}$ étant égaux, ils sont donc colinéaires et donc $(MH) \perp \Delta$.

En outre, $d(M, \Delta) = MH = \sqrt{(1-(-1))^2 + (5-6)^2} = \sqrt{5}$.

Exercice 1

Vérifier que le projeté du point $P(-4\,;8)$ sur la droite $\mathscr{D}$: $-5x + 2y = 7$ est le point $H(1\,;6)$.

Exemple 2

$A(9\,;-3)$ et $\mathscr{E}$: $3x + 2y - 8 = 0$.
On note H le projeté orthogonal de A sur $\mathscr{E}$.
Déjà, $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{E}$ donc est un vecteur directeur directeur à la droite (AH) car $(AH) \perp \mathscr{E}$.
On détermine une équation de (AH) :

$M(x\,;y) \in (AH) \Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AM}, \vec{n}\right) = 0 \Leftrightarrow \text{dét}\left(\begin{pmatrix} x-9 \\ y+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-9) - 3(y+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y - 27 = 0$.

$H(x\,;y)$ étant l'intersection des droites (AH) et $\mathscr{E}$, on résout le système :

$$\begin{cases} 2x - 3y - 27 = 0 \\ 3x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 27 = 0 \\ 2(3x + 2y - 8) - 3(2x - 3y - 27) = 0 - 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 27 = 0 \\ 13y + 65 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y - 27 = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 12 = 0 \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Ainsi, $H(6\,;5)$ est le projeté de A sur $\mathscr{E}$.

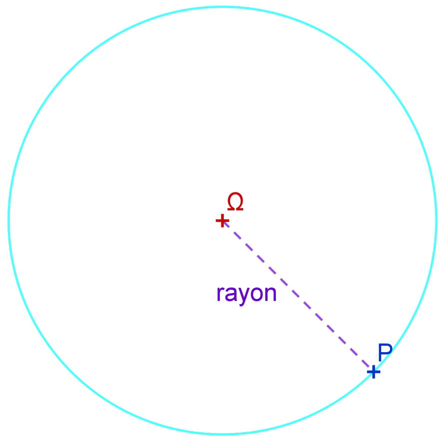
II. Cercle

Proposition 1

Le cercle $\mathscr{C}$, de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon r a pour équation

$$(x-a)+(y-b)^2=r^2.$$

Ainsi, un point P appartient à ce cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de $\mathscr{C}$.



N.B. : Pour $\mathrm{P}(x\,;y)\in\mathscr{C}$, cette équation caractérise l'égalité $\mathrm{P}\Omega^2=r^2$.
Or $\mathrm{P}\in\mathscr{C}\Leftrightarrow \mathrm{P}\Omega=r\Leftrightarrow \mathrm{P}\Omega^2=r^2$ (les quantités PΩ et r étant positives).

Proposition 2

Une équation de la forme $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ est

- l'équation du cercle de centre $\Omega(a\,;b)$ et de rayon $\sqrt{k}$ si $k>0$;
- le point de coordonnées $(a\,;b)$ si $k=0$;
- l'ensemble vide si $k<0$.

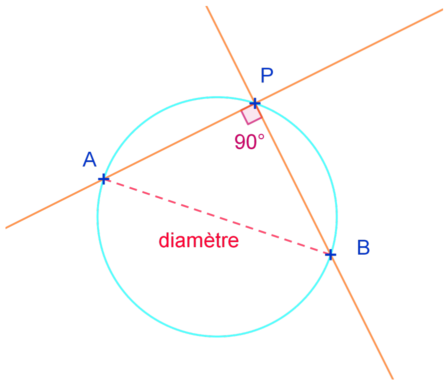
Exemple 3

- L'équation $(x+1)^2+(y-6)^2=91$ est une équation du cercle de centre $\mathrm{A}(-1\,;6)$ et de rayon $\sqrt{91}$.
- L'ensemble de points de coordonnées $(x\,;y)$ vérifiant $(x+1)^2+(y-6)^2=-91$ est l'ensemble vide.
- Comme $x^2+y^2-12y+16=0\Leftrightarrow x^2+(y-6)^2-20=0\Leftrightarrow x^2+(y-6)^2=20$, c'est une équation du cercle de centre $\mathrm{B}(0\,;6)$ et de rayon $\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Proposition 3

Si A $(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et B($(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ sont deux points distincts, alors une équation du cercle de diamètre [AB] est

$$(x-x_\mathrm{A})(x-x_\mathrm{B})+(y-y_\mathrm{A})(y-y_\mathrm{B})=0.$$



N.B. : Pour $\mathrm{P}(x\,;y)$ appartenant au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB], cette égalité caractérise $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$.
Or, $\mathrm{P}\in\mathscr{C}\Leftrightarrow(\mathrm{AP})\perp(\mathrm{BP})\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$.

Exercice 2

$\mathrm{A}(-2\,;1)$, $\mathrm{B}(7\,;0)$ et $\mathrm{C}(7\,;-1)$ sont trois points du plan.

1. Déterminer une équation du cercle de centre A et de rayon 4.
2. Déterminer une équation du cercle de diamètre [BC].
3. Reconnaître l'ensemble des points $\mathrm{M}(x\,;y)$ vérifiant $x^2+y^2-2x-3y-3{,}75=0$.
   Indication : déterminer les formes canoniques de x^2-2x et y^2-3y.