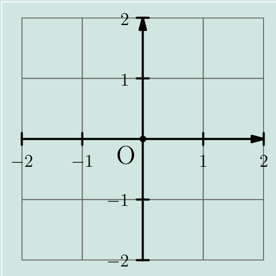
CHAPITRE -3

GÉOMÉTRIE PLANE : SECONDE

I. Repères du plan

Définition 1

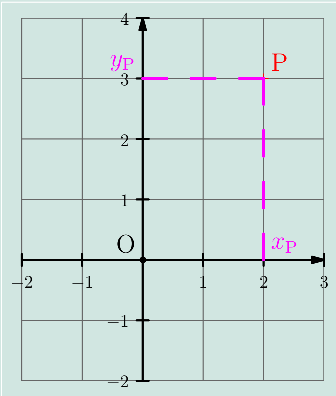
Dans le plan, trois non alignés O, I, J déterminent **un repère du plan** (O,I,J).
La droite (OI) s'appelle **axe des abscisses**.
La droite (OJ) s'appelle **axe des ordonnées**.



Remarque : Le repère (O,I,J) est dit **orthonormé** si $\begin{cases} (OI)\perp(OJ) \\ OI = OJ = 1 \end{cases}$.

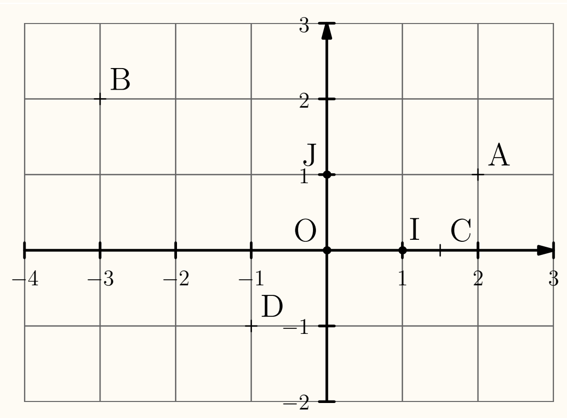
Définition 2

On munit le plan d'un repère (O,I,J).
Dans ce repère tout point P du plan est repéré par deux nombres que l'on présente sous la forme d'**un couple de coordonnées** : $P(x_P\,;y_P)$: ce sont les coordonnées **cartésiennes**.
Le nombre repéré par l'axe des abscisses s'appelle **abscisse du point** P, et est noté généralement x_P.
Le nombre repéré par l'axe des ordonnées s'appelle **ordonnée du point** P, et est noté généralement y_P.
Deux points qui ont les mêmes coordonnées sont dits **confondus**.



Exemple 1

1. Lire les coordonnées des points A, B, C.
2. Placer les points D(−3 ; 2) ; E$\left(3\,;-\dfrac{3}{2}\right)$; F(1 ; 1) ; G(−0,5 ; 2,5).



II. Milieu d'un segment

Définition 3

A et B sont deux points distincts du plan.

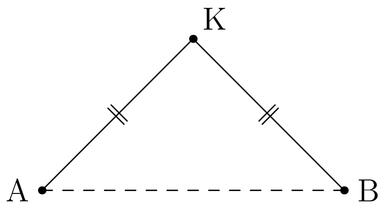
- **la droite** (AB) est l'ensemble des points P tels que les points A, B et P sont alignés ;
- **le segment** [AB] est la portion « intérieure » de la droite (AB) délimitée par les points A et B.

Définition 4

A et B sont deux points distincts du plan.
Le milieu du segment [AB] est l'unique point M tel que
$$\begin{cases} \mathrm{AM} = \mathrm{MB} \\ \mathrm{M} \in [\mathrm{AB}] \end{cases}.$$

Notation : Le symbole « $\in$ » signifie « appartient à » ; on utilise « $\notin$ » pour « n'appartient pas à ».

Remarque : Un point K tel que AK = KB n'est pas nécessairement le milieu du segment [AB] ; cependant il appartient à la médiatrice du segment [AB], *i.e.* la droite passant par le milieu du segment [AB] et perpendiculaire à la droite (AB).



Proposition 1

$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ sont deux points du plan et $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}\,;y_\mathrm{M})$ est le milieu du segment [AB].
On a les relations :
$$x_\mathrm{M} = \frac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2} \qquad y_\mathrm{M} = \frac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}.$$
Ainsi, les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes de celles des extrémités.

Exemple 2

On définit A(−2 ; 3) et B(1 ; −5). Déterminer les coordonnées du milieu du segment [AB].
On note I ce milieu et on a : $\mathrm{M}\left(\dfrac{-2+1}{2}\,;\dfrac{3+(-5)}{2}\right)$ d'où $\mathrm{M}\left(-\dfrac{1}{2}\,;-1\right)$.

III. Distance entre deux points

Proposition 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé. $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,;y_\mathrm{B})$ sont deux points du plan. Alors :
$$\mathrm{AB}^2 = (x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2$$
$$\mathrm{AB} = \sqrt{(x_\mathrm{B}-x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B}-y_\mathrm{A})^2}$$

Remarque : Cette formule n'est valable que dans les repères orthonormés.

Exemple 3

On définit A(−2 ; 3) et B(1 ; −5) deux points du plan.
Déterminer la valeur exacte de la distance AB, puis une valeur arrondie à 10^{-3} près.
$\mathrm{AB}^2 = [1-(-2)]^2 + [-5-3]^2 = 3^2 + (-8)^2 = 9 + 64 = 73$ d'où $\mathrm{AB} = \sqrt{73} \approx 8{,}544$.

IV. Configurations du plan

IV.1. Alignement

Proposition 3

Trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre si et seulement si $\mathrm{AB} + \mathrm{BC} = \mathrm{BC}$.

Exemple 4

Les points $\mathrm{A}(-19\,;22)$, $\mathrm{B}(95\,;-44)$ et $\mathrm{C}(19\,;0)$ sont-ils alignés ?
Même question pour les points A, B et $\mathrm{D}(45\,;-15)$.

IV.2. Triangles

Proposition 4

On considère un triangle ABC.

- Le triangle ABC est **isocèle** en A si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{BC}$. Il est **équilatéral** si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{BC}$.
- Le triangle ABC est **rectangle** en A si et seulement si $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$.
- Un triangle peut être simultanément isocèle et rectangle en un même point.
- Un triangle qui ne possède aucune de ces propriétés est dit **quelconque** ou **scalène**.

Exemple 5

Le triangle EFG, avec $\mathrm{E}(4\,;8)$, $\mathrm{F}(12\,;4)$ et $\mathrm{G}(20\,;34)$ est-il rectangle ?

IV.3. Quadrilatères

Proposition 5

On considère un quadrilatère ABCD.

- Le quadrilatère ABCD est un **parallélogramme** si et seulement si les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.
  * Le parallélogramme ABCD est un **losange** si et seulement si $\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ (deux côtés consécutifs ont même longueur).
  * Le parallélogramme ABCD est un **rectangle** si et seulement si $\mathrm{AC} = \mathrm{BD}$ (les diagonales ont même longueur).
  * Le parallélogramme ABCD est un **carré** si et seulement si (ABCD est un rectangle et un losange).

Exemple 6

Étudier la nature du quadrilatère RSTU avec $\mathrm{R}(-1\,;3)$, $\mathrm{S}(2{,}5\,;5)$, $\mathrm{T}(9{,}5\,;2)$ et $\mathrm{U}(6\,;0)$.

IV.4. Cercle, disque

Proposition 6

On considère un point C et un nombre réel $r \geqslant 0$.

- Un point P appartient au **cercle** de centre C et de rayon r si et seulement si $\mathrm{CP} = r$.
- Un point P appartient au **disque** de centre C et de rayon r si et seulement si $\mathrm{CP} \leqslant r$.

V. Vecteurs

V.1. Translation et vecteur

Définition 5

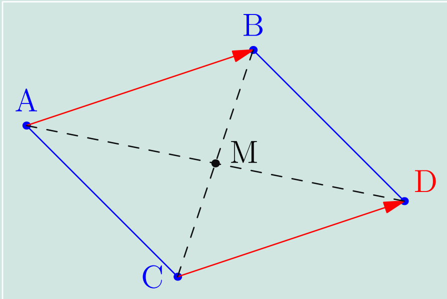
Dans un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère deux points A et B.

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la transformation du plan qui à tout point C du plan lui associe un unique point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

Remarque : Dire que le point D l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est équivalent à dire que les segments [AD] et [BC] se coupent en leur milieu, les diagonales d'un parallélogramme se coupant en leurs milieux.

Définition 6

A, B, C et D sont quatre points du plan.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux
si et seulement si ils définissent la même translation
si et seulement si ABDC est un parallélogramme.
On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Définition 7

On considère A et B deux points du plan. À partir de n'importe quel point du plan, on peut tracer un vecteur qui lui est égal. On pourra alors le noter $\vec{u}$.
On dira alors que $\overrightarrow{AB}$ est **un représentant du vecteur** $\vec{u}$.
Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$, le point A sera **son origine** et le point B **son extrémité**.

Proposition 7

À tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan, on peut faire correspondre :

- une direction : celle de la droite (AB)
- un sens : celui de A vers B
- une longueur : la longueur AB

Ces trois données sont caractéristiques du vecteur.
Cependant, un vecteur $\vec{u}$ ne possède pas de point d'application : on peut le représenter en plusieurs endroits du plan.

Définition 8

La **norme** d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la longueur AB. On la note $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

Définition 9

On définit **le vecteur nul** comme le vecteur associé à la translation qui ne « bouge » aucun point du plan.
On le note $\vec{0}$.

V.2. Coordonnées d'un vecteur

Définition 10

On se place dans un repère (O ; I ; J) du plan. On considère $\vec{u}$ un vecteur.
On peut créer un représentant du vecteur $\vec{u}$ d'origine le point O(0 ; 0) et on note M(x ; y) le point qui correspond à son extrémité.
On a ainsi $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$.
Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les mêmes que celles du point M, et on les note généralement :
$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Proposition 8

On considère A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points du plan. Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Proposition 9

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées dans un repère du plan.

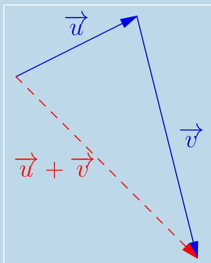
Proposition 10

Dans un repère orthonormé, pour un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

V.3. Somme de vecteurs

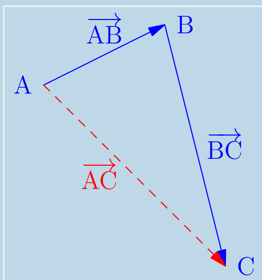
Proposition 11

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
Si on enchaîne la translation de vecteur $\vec{u}$ puis la translation de vecteur $\vec{v}$, on obtient une nouvelle translation de vecteur que l'on appelle **somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$**. On le note $\vec{u} + \vec{v}$.



Proposition 12 Relation de CHASLES

Pour tous points A, B et C :
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
On appelle cette propriété **la relation de** CHASLES.



Proposition 13

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan.

Alors $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

V.4. Opposé d'un vecteur

Définition 11

$\vec{u}$ est un vecteur du plan.
Le **vecteur opposé au vecteur** $\vec{u}$ est le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$.
On le note $-\vec{u}$ et on a donc : $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

Proposition 14

Le vecteur opposé $-\vec{u}$ est un vecteur de même direction et même norme que le vecteur originel $\vec{u}$ mais de sens contraire. Ainsi, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

V.5. Multiplication par un scalaire

Définition 12

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur et k un nombre réel.

On définit le vecteur $k \cdot \vec{u}$ par les coordonnées : $k \cdot \vec{u}\begin{pmatrix} k \times x \\ k \times y \end{pmatrix}$.

Proposition 15

On considère $\vec{u}$ un vecteur et k un nombre réel.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $k \cdot \vec{u}$ ont la même direction.

Proposition 16

On considère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et k et k' deux nombres réels.
$(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$
$k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \times k') \cdot \vec{u}$
$k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$

V.6. Vecteurs colinéaires

Définition 13

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**
si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ ou $\vec{v} = k \cdot \vec{u}$.

Proposition 17

Deux vecteurs colinéaires ont la même direction.

Proposition 18

On considère $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles ,*i.e.*

x	y
x'	y'

un tableau de proportionnalité ;

si et seulement si $xy' - x'y = 0$.

V.7. Déterminant

Définition 14

Le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ est défini par dét $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = xy' - x'y$.

Proposition 19

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si dét $\left(\vec{u},\vec{v}\right) = 0$.

Proposition 20

A, B, C et D sont quatre points du plan.

- $\mathrm{C} \in (\mathrm{AB})$ si et seulement si dét $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0$.
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si dét $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) = 0$.
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si dét $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{CD}}\right) = 0$.

VI. Droites du plan

Proposition 21

On considère un point A et un vecteur $\vec{u}$ non nul.
La droite $(\mathrm{A}\,;\vec{u})$ est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.
On dit alors que $\vec{u}$ est **un vecteur directeur de la droite** $(\mathrm{A}\,;\vec{u})$.

Remarque : Tout vecteur non nul, colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite $(\mathrm{A}\,;\vec{u})$.

Proposition 22

Toute droite $\mathscr{D}$ du plan admet une équation de la forme

$$ax + by + c = 0$$

avec la condition $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.
On dit que $ax + by + c = 0$ est **une équation cartésienne** de la droite $\mathscr{D}$.
En outre, le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.

Proposition 23

On considère un point $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}\,;y_\mathrm{M})$ et une droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$.
Le point M appartient à la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si
$ax_\mathrm{M} + by_\mathrm{M} + c = 0$.

Proposition 24

On considère la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ avec $b \neq 0$.
$\mathscr{D}$ admet alors une équation de la forme $y = mx + p$ avec $m = -\frac{a}{b}$, appelée **équation réduite**.
En outre, $\mathscr{D}$ admet pour coefficient directeur le nombre m.

Proposition 25

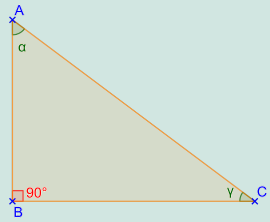
Deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

VII. Trigonométrie

Définition 15

Pour un triangle ABC, rectangle en B,

- le côté [AC] est l'**hypoténuse** du triangle ;
- pour l'angle $\widehat{BAC}$, le côté [AB] est le **côté adjacent** et le côté [BC] est le **côté opposé**.



Définition 16

Pour un triangle ABC rectangle en B, on définit le **cosinus**, le **sinus** et la **tangente** de l'angle aigu $\widehat{BAC}$ par

- $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{AB}{AC}$;
- $\sin\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{BC}{AC}$.
- $\tan\left(\widehat{BAC}\right) = \dfrac{BC}{AB}$.

On retient aussi

- $\cos(\text{angle}) = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$;
- $\sin(\text{angle}) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$.
- $\tan(\text{angle}) = \dfrac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$.

Proposition 26

x	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0