CHAPITRE 6

RÉSOLUTION D'(IN)ÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ

I. Équations du deuxième degré et racines

Définition 1

Pour une fonction f, on appelle **racines de** f les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

N.B. : Cela revient à déterminer les antécédents de 0 par f.

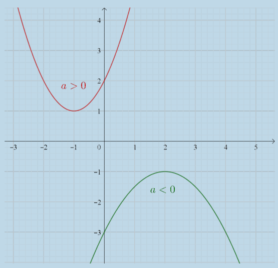
Définition 2

f est une fonction polynomiale du deuxième degré, d'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Le discriminant de f est le nombre réel Δ défini par : $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 1 : résolution des équations du deuxième degré

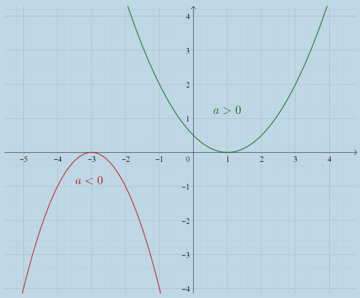
Pour résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, ce que revient à déterminer les racines de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$:

- si $\Delta < 0$, l'équation $ax^2+bx+c = 0$ n'a pas de solution réelle.



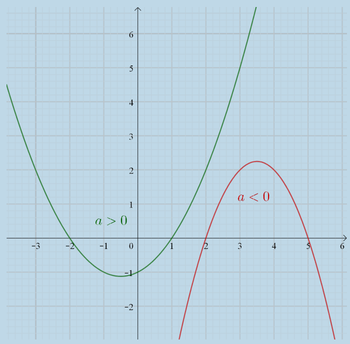
$\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.

- si $\Delta = 0$, l'équation $ax^2+b+x+c = 0$ a une solution réelle : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.



$\mathscr{C}_f$ est tangente à l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.

- si $\Delta > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.



$\mathscr{C}_f$ coupe en deux points l'axe des abscisses.

Proposition 2

On suppose que $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est une fonction polynomiale de discriminant positif.
Alors on peut écrire f sous **sa forme factorisée :**

- si $\Delta = 0$,
$$f(x) = a(x - x_0)^2 \text{ où } x_0 = -\frac{b}{2a}\,;$$
- si $\Delta > 0$,
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ où } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Exemple 1

Le discriminant de f définie par : $f(x) = 2x^2 - 2x - 3$ vaut $(-2)^2 - 4\times2\times3 = 28$, les racines de f sont :
$x_1 = \frac{-(-2)-\sqrt{28}}{2\times2} = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-2)+\sqrt{28}}{2\times2} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$; $S = \{x_1\,;x_2\}$.
Ainsi, $f(x) = 2\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$.

II. Relations coefficients & racines

Proposition 3

Si deux nombres réels x_1 et x_2 de somme s et de produit p, alors ils sont les racines de la fonction f définie par $f(z) = z^2 - sz + p$.

Proposition 4

Pour une fonction polynomiale de deuxième degré de coefficient dominant égal à 1, dont l'expression est $f(x) = x^2 + bx + c$:

- la somme des deux racines vaut $-b$;
- le produit des deux racines vaut c.

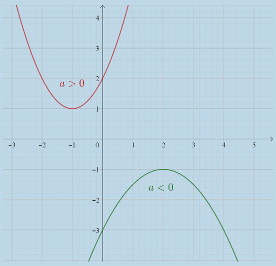
III. Inéquations du deuxième degré et racines

Proposition 5 : signe d'une fonction polynomiale du deuxième degré

Pour résoudre l'inéquation $ax^2+bx+c > 0$ avec $a \neq 0$, ce que revient à déterminer le signe de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$:

- si $\Delta < 0$,
  f est strictement positive ou négative sur $\mathbb{R}$

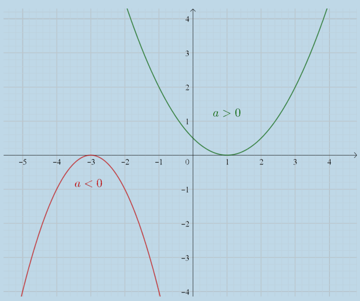
x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f(x)$	signe de a	



$\mathscr{C}_f$ est entièrement en-dessous ou bien au-dessus par l'axe des abscisses.

- si $\Delta = 0$,
  f est négative ou bien positive sur $\mathbb{R}$ et s'annule en x_0.

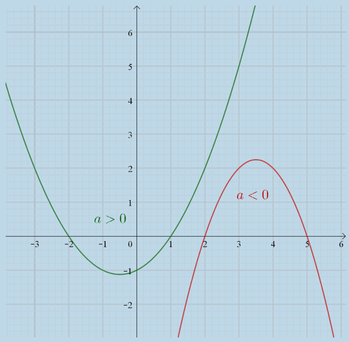
x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de a	



$\mathscr{C}_f$ est tangente à l'axe des abscisses au point d'abscisse x_0.

- si $\Delta > 0$,
  f change deux fois de signes sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	



$\mathscr{C}_f$ est délimité en deux zones par l'axe des abscisses.

Exemple 2

Pour déterminer le signe de $-x^2 + 5x + 6$, on calcule le discriminant $5^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 49$.

Les racines sont $x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times(-1)} = 6$ et $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
Signe de $-x^2+5x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble solution de l'inéquation $-x^2 + 5x + 6 > 0$ est $S =]-1\,;6[$.