CHAPITRE 8

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

I. Préliminaires

I.1. Évolutions

Définition 1

Une variable évolue d'une valeur V_0 vers une valeur V_1.

- L'**évolution absolue** est la quantité $V_1 - V_0$.
- L'**évolution relative** (ou taux d'évolution) est $\frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

Proposition 1

Pour une variable passant d'une valeur V_0 à la valeur V_1 au taux d'évolution τ, on a la relation :

$$V_1 = V_0(1+\tau)$$

où $1+\tau$ est appelé le **coefficient multiplicateur associé au taux τ.**

Exemple 1

- En Italie, sur une journée, le nombre de cas confirmés de COVID-19 [1] 1 est passé de 27 980 à 31 506.
  - L'évolution absolue vaut $31\,506 - 27\,980 = 3\,526$.
  - L'évolution relative vaut $\frac{3\,526}{27980} \approx 0{,}126 = 12{,}6\ \%$.
- En France, sur une journée, le nombre de cas confirmés de COVID-19 a augmenté de 16,5 % et s'élève à 7 730. Si on note x le nombre de cas de la veille, on a :
  $7\,730 = x(1+16{,}5\ \%) \Leftrightarrow x = \frac{7\,730}{1{,}165} \approx 6\,635$.
- Le nombre de cas en Allemagne, de 8 374 la veille a augmenté de 35 % : il est donc dorénavant de $8\,374 \times (1+35\ \%) = 11\,304$.

Exemple 2

Archibald et Gary se préparent pour le semi-marathon (distance à parcourir : 21,1 km).
Ils s'entrainent hebdomadairement et de manière progressive ; chacun commence à s'entrainer 3 000 m la première semaine et par la suite :

- Archibald augmente sa distance de course de 450 m par semaine ;
- Gary augmente sa distance de course de 10 % par semaine.

On note a_n la distance parcourue par Archibald au bout de n et g_n celle par Gary.
Grâce à l'énoncé, on sait que $a_0 = 3\,000$ et $g_0 = 3\,000$.

- Entre deux entrainements consécutifs, Archibald court 450 m de plus : ainsi il court 450 m en plus au $n+1$-ème entrainement qu'au n-ème entrainement.
  On en déduit la relation : $a_{n+1} = a_n + 450$.
- Entre deux entrainements consécutifs, Bobby court 10 % en plus : ainsi il court 10 % en plus au $n+1$-ème entrainement par rapport n-ème entrainement.
  On en déduit la relation : $g_{n+1} = g_n \times 1{,}1$.

1. Source

II. Suites arithmétiques

II.1. Définition

Définition 2

Une suite $(a_n)_n$ est **arithmétique** de raison r si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation de récurrence $a_{n+1} = a_n + r$. Ainsi, l'évolution absolue entre deux termes consécutifs est constante et vaut la raison : $a_{n+1} - a_n = r$.

Exemple 3

- La suite correspondant à l'entrainement d'Archibald est arithmétique : $\begin{cases} a_0 = 3\,000 \\ a_{n+1} = a_n + 450 \end{cases}$

  Dans cette situation, la raison est $r = 450$ car pour tout entier naturel n : $a_{n+1} - a_n = 450$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = -7n + 2$, alors $b_{n+1} = -7(n+1) + 2 = -7n - 5$, d'où $b_{n+1} - b_n = (-7n+2) - (-7n-5) = -7$ et donc la suite (b_n) est arithmétique de raison -7.
- Cette fonction en Python est traduite en algorithme d'entrée un entier $n \geqslant 0$ et de sortie c.

```python
def c(n):
    c = 19
    for k in range(n):
        c =  c - 3
    return c
```

$c \leftarrow 19$
Pour k allant de 1 à n
  $c \leftarrow c - 3$

La fonction définit une suite $\begin{cases} c_0 = 19 \\ c_{n+1} = c_n - 3 \end{cases}$ qui est arithmétique de raison 3.

- La suite définie par $z_n = n^2 + 3$ n'est pas arithmétique : comme $z_0 = 3$, $z_1 = 4$ et $z_2 = 7$, on a $z_2 - z_1 = 3$ et $z_1 - z_0 = 1$: l'évolution absolue entre deux termes consécutifs n'est pas constante, donc la suite (d_n) n'est pas arithmétique.

Proposition 2

- On peut caractériser une suite arithmétique par la donnée de son premier terme et de sa raison.
- Si (a_n) est une suite arithmétique de premier terme a_0 et de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + rn$.
- Les suites arithmétiques correspondent à des évolutions **linéaires**.

Exemple 4

En reprenant l'exemple précédent,

- Pour tout entier naturel n, $a_n = 3\,000 + 450n$.
- Pour tout entier naturel n, $c_n = 19 - 3n$.

II.2. Variation

Proposition 3

On considère une suite arithmétique (a_n) de raison r.

- Si $r > 0$, la suite (a_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite (a_n) est strictement décroissante.

II.3. Sommes partielles

Proposition 4

Pour tout entier naturel n,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 5

Si (a_n) est la suite arithmétique de premier terme a_0 et de raison r, alors

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0+\cdots+a_n = \frac{(a_0+a_n)\times(n+1)}{2} = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme})\times(\text{nombre de termes})}{2}$.
- Si $p < n$, on a $a_p + \cdots + a_n = \dfrac{(a_p+a_n)\times(n-p+1)}{2}$.

N.B. :

- Entre 0 et n il y a $n+1$ entiers.
- Entre p et n il y a $n-p+1$ entiers.

III. Suites géométriques

III.1. Définition

Définition 3

Une suite $(g_n)_n$ est **géométrique** de raison q si pour tout n, on a la relation de récurrence $g_{n+1} = q \times g_n$.
Ainsi, l'évolution relative entre deux termes consécutifs est constante, au taux $q-1$.

Exemple 5

- La suite correspondant à l'entrainement de Gary est géométrique : $\begin{cases} g_0 = 3\,000 \\ g_{n+1} = 1{,}1 \times g_n \end{cases}$
  Dans cette situation, la raison est $q = 1{,}1$:car pour tout entier naturel n, $g_{n+1} = 1{,}1 g_n$.
- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_n = 4 \times 1{,}5^n$, alors $h_{n+1} = 4 \times 1{,}5^{n+1}$.
  Mais alors, $\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{4\times1{,}5^{n+1}}{4\times1{,}5^n} = 1{,}5$ et donc la suite (h_n) est géométrique de raison 1,5.
- Si une suite modélise une quantité i_n telle que pour tout n, on passe de i_n à i_{n+1} par une diminution de 15 %, alors la suite (i_n) est géométrique de raison $1 - 0{,}15 = 0{,}85$.
- Cette fonction en Python est traduite en algorithme d'entrée un entier $n \geqslant 0$ et de sortie j.

```
def j(n):
    j = 3
    for k in range(n):
        j =  j*1.12
    return j
```

$j \leftarrow 3$ **Pour** k allant de 1 à n $\quad j \leftarrow 1{,}12j$

La fonction définit une suite $\begin{cases} j_0 = 3 \\ j_{n+1} = 1{,}12 j_n \end{cases}$ qui est géométrique de raison 1,12.

Proposition 6

- On peut caractériser une suite géométrique par la donnée de son premier terme et de sa raison.
- Si $(g_n)_n$ est la suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme g_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = g_0 \times q^n$.
- Les suites géométriques de raison strictement positives correspondent à des évolutions **exponentielles**.

Exemple 6

En reprenant l'exemple précédent,

- $\forall n \in \mathbb{N}, g_n = 3\,000 \times 1{,}1^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, i_n = i_0 \times 0{,}85^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, j_n = 3 \times 1{,}12^n$.

III.2. Variations

Proposition 7

$(g_n)_n$ est la suite géométrique de premier g_0 et de raison q.
Le sens de variation de la suite $(g_n)_n$ dépend du signe du premier terme g_0 et de la raison q.

	$q<0$	$0<q<1$	$q>1$
$g_0<0$	(g_n) non monotone	(g_n) croissante	(g_n) décroissante
$g_0>0$	(g_n) non monotone	(g_n) décroissante	(g_n) croissante

III.3. Sommes partielles

Proposition 8

La somme des $n+1$ puissances successives d'un nombre réel $q \neq 1$ s'exprime sous la forme

$$\underbrace{1+q+\cdots+q^n}_{n+1 \textbf{ termes}} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Exemple 7

Calculer $1+3+\cdots+3^{29}$.
$1+3+\cdots+3^{29} = \frac{1-3^{30}}{1-3} = 102\,945\,566\,047\,324$

Proposition 9

Si $(g_n)_n$ est la suite géométrique de premier terme g_0 et de raison $q \neq 1$, alors

- $$g_0+g_1+\cdots+g_n = g_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \text{premier terme} \times \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$$
- Si $p<n$, alors $g_p+\cdots+g_n = g_p\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

Exemple 8

Calculer la somme des 25 premiers termes de la suite définie par $u_n = 7\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$.
On reconnait la suite géométrique de premier terme $u_0=7$ et de raison $\frac{1}{2}$.
On applique la formule :
$u_0+\cdots+u_{24} = 7\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{25}}{1-\frac{1}{2}} = 1{,}999\,999\,881$.