CHAPITRE 7

VARIABLES ALÉATOIRES

I. Loi de probabilité

Exemple 1

Une urne contient 10 boules : 3 sont numérotées 2, 2 sont numérotées 3, 4 sont numérotées 5 et 1 est numérotée 7.

On en prélève une et on reporte son numéro :

Numéro	2	3	5	7
Probabilité	0,3	0,2	0,4	0,1

.

Si on note le numéro de la boule X, X prend aléatoirement une valeur parmi : 2 ; 3 ; 5 et 7.
On peut noter l'évènement « tirer une boule portant le numéro 2 » : $X = 2$ et la probabilité de cet évènement $\mathbf{P}(X = 2)$.

Définition 1

Pour une expérience aléatoire d'univers Ω (comportant un nombre fini d'éléments), une **variable aléatoire** X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.
Si on note x une valeur prise par X, on note

- $\{X = x\}$ l'évènement « X prend la valeur x » ;
- $\{X \leqslant x\}$ l'évènement « X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

Définition 2

Pour une variable aléatoire X, **la loi de probabilité de** X est la fonction qui à une valeur x prise par X associe $\mathbf{P}(X = x)$. On la présente souvent à l'aide d'un tableau ou d'un diagramme en bâtons.

Exemple 2

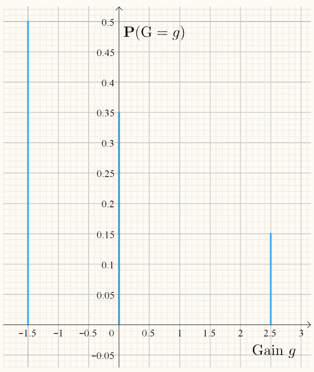
Dans un jeu à gratter d'une valeur de 1,5 euro, 15 % des tickets rapportent 4 euros et 35 % rapportent 1,5 euro ; les autres ne rapportent rien.
On note G la variable aléatoire du gain du ticket. G prend trois valeurs : 2,5 ; 0 et $-1{,}5$.

La loi de probabilité de la variable G est :

g	$-1{,}5$	0	2,5
$P(G = g)$	0,5	0,35	0,15

.

La probabilité p de ne pas perdre de l'argent est :
$p = \mathbf{P}(G \geqslant 0)$
$p = \mathbf{P}(G = 0) + \mathbf{P}(G = 2{,}5)$
$p = 0{,}35 + 0{,}15 = 0{,}5$.




```
import random as rd

def simu_G():
    alea = rd.randint(1,100)
    if alea <= 50:
        return -1.5
    if alea <= 85:
        return 0
    return 0.15
```

Exemple 3

```
cpt = 0
for _ in range(1000):
    if simu_G() >= 0:
        cpt = cpt +1 #cpt augmente de 1 si simu_G() >=0#
cpt = cpt/1000 #on obtient la fréquence ~ P(G>=0)#
```

II. Espérance, écart type

Définition 3

Pour une variable aléatoire X de loi

x	x_1	$\cdots$	x_r
$\mathbf{P}(X = x)$	p_1	$\cdots$	p_r

,

l'espérance de X est le nombre : $\mathbf{E}(X) = p_1 x_1 + \cdots + p_r x_r$.

Proposition 1

- L'espérance est la valeur moyenne de la variable aléatoire.
- La moyenne d'un grand nombre de réalisations d'une variable aléatoire tend à être proche de l'espérance de cette variable aléatoire.

Exemple 4

Pour la variable aléatoire G de loi :

g	$-1{,}5$	0	$2{,}5$
$P(G = g)$	$0{,}5$	$0{,}35$	$0{,}15$

.

$\mathbf{E}(G) = 0{,}5 \times (-1{,}5) + 0{,}35 \times 0 + 0{,}15 \times 2{,}5 = -0{,}375$ €.
Ainsi, le gain moyen d'un ticket est $-0{,}375$ €.

Exemple 5

On peut estimer l'espérance à partir des simulations de la variable aléatoire en faisant la somme de n simulations puis en divisant par le nombre de simulations n.

```
mu = 0
for _ in range(300):
    mu = mu + simu_G()
mu = mu/300
```

```
liste = []
for _ in range(300):
    liste.append(simu_G())
mu = sum(liste)/300
```

```
liste = [simu_G() for _ in range(300)]
mu = sum(liste)/300
```

Définition 4

Pour une variable aléatoire X de loi

x	x_1	$\cdots$	x_r
$\mathbf{P}(X = x)$	p_1	$\cdots$	p_r

et d'espérance $\mathbf{E}(X)$,

- **la variance** $\mathbf{V}(X)$ est le nombre : $\mathbf{V}(X) = p_1\left(x_1 - \mathbf{E}(X)\right)^2 + \cdots + p_r\left(x_r - \mathbf{E}(X)\right)^2$;
- **l'écart type** $\sigma(X)$ est le nombre : $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition 2

- La variance correspond à la moyenne des carrés des écarts à l'espérance.
- L'écart type permet de mesurer la dispersion de la loi de probabilités par rapport à l'espérance : plus l'écart type est faible, plus les valeurs tendent à être proche de l'espérance de la loi.

Exemple 6

Pour la variable aléatoire G de loi :

g	$-1{,}5$	0	$2{,}5$
$P(G = g)$	$0{,}5$	$0{,}35$	$0{,}15$

, on a $\mathbf{E}(G) = -0{,}375$ €.

$\mathbf{V}(G) = 0{,}5 \times (-1{,}5 + 0{,}375)^2 + 0{,}35 \times (0 + 0{,}375)^2 + 0{,}15 \times (2{,}5 + 0{,}375)^2 = 1{,}92\,875$
$\sigma(X) = \sqrt{1{,}921\,875} \approx 1{,}39$.

↪ **Exemple 7**

3 lois, deux avec même espérance