CHAPITRE 9

VARIATIONS & DÉRIVATION

I. Préliminaires

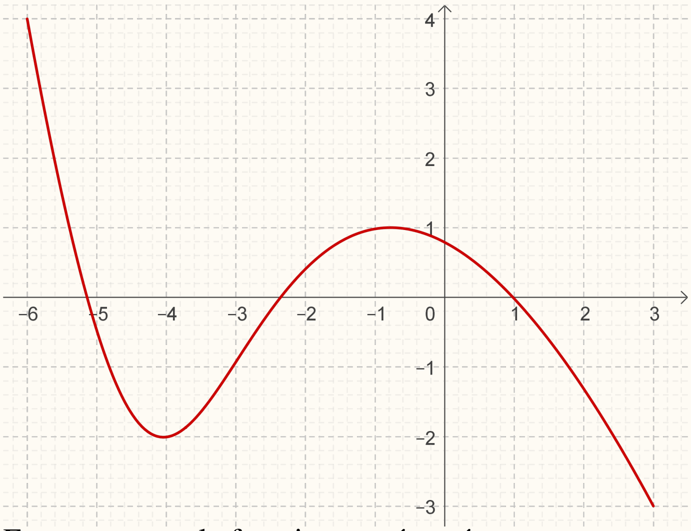
Définition 1

Une fonction f définie sur un intervalle I est :

- **strictement décroissante** si pour tous nombres réels a et b dans I, $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$;
- **décroissante** si pour tous nombres réels a et b dans I, $a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$;
- **constante** si pour tous nombres réels a et b dans I, $a < b \Rightarrow f(a) = f(b)$;
- **croissante** si pour tous nombres réels a et b dans I, $a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$;
- **strictement croissante** si pour tous nombres réels a et b dans I, $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$;
- **monotone** si elle est croissante ou bien décroissante sur I ;
- **non monotone** si elle est ni croissante ni décroissante sur I.

On veillera à ne décrire les variations d'une fonction que sur un intervalle (ensemble de la forme $[c\,;d]$, $]c\,;d[$, ...).

Exemple 1



La fonction représentée est :

- strictement décroissante sur $[-6\,;-4]$;
- non monotone sur $[-4\,;3]$, mais est strictement croissante sur $[-4\,;-0{,}8]$ et strictement décroissante sur $[-0{,}8\,;3]$.

En nommant g la fonction représentée,

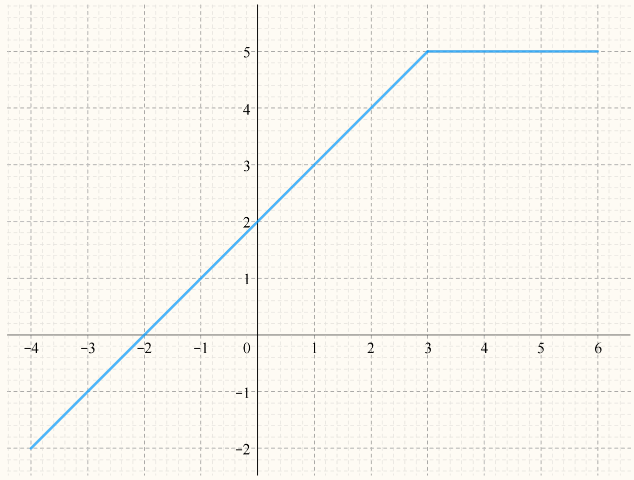
- le domaine de définition de la fonction g est $[-6\,;3]$.
- g est décroissante sur les intervalles $[-6\,;-4]$ et $[-0{,}8\,;3]$ (ne pas dire « sur $[6\,;-4] \cup [-0{,}8\,;3]$ » qui n'est pas un intervalle) ;
- g est croissante sur l'intervalle $[-4\,;-0{,}8]$.

On peut résumer cette description dans un tableau de variations :

x	-6	-4	$-2{,}4$	$-0{,}8$	3
Variations de g	4 ↘	-2 ↗	0 ↗	2 ↘	-3

On remarque aussi que la fonction g est définie dans $[-6\,;3]$ et est à valeurs dans $[-3\,;4]$.

Exemple 2



La fonction représentée n'est pas strictement croissante sur $[-4\,;6]$, mais est croissante sur $[-4\,;6]$, strictement croissante sur $[-4\,;3]$ et constante sur $[3\,;6]$.
En nommant h la fonction représentée,

x	-4	3	6
Variations de h	-2 ↗	5 →	5

Définition 2

- Un **minorant** de la fonction f sur l'intervalle I par un nombre réel b tel que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, on a $b \leqslant f(x)$.
- Un **majorant** de la fonction f sur l'intervalle I par un nombre réel B tel que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, on a $f(x) \leqslant \mathrm{B}$.
- Une fonction qui possède un minorant et un majorant sur un intervalle est **bornée**.

Définition 3

On considère une fonction f définie sur intervalle I.

- Un nombre réel m est **le minimum** de la fonction sur I si m est un minorant de f et qu'il existe $a \in \mathrm{I}$, $f(a) = m$ (ce minorant possède un antécédent par f). On dit alors que le minimum est atteint en a.
- Un nombre réel M est **le maximum** de la fonction sur I si M est un majorant de f et qu'il existe $a \in \mathrm{I}$, $f(a) = \mathrm{M}$ (ce majorant possède un antécédent par f). On dit alors que le maximum est atteint en a.

N.B. : Un **extremum** (pluriel : extrema) désigne un minimum ou un maximum.

Exemple 3

x	-5	2	7	$+\infty$
Variations de F	3 ↘	-5 ↗	10 ↘	

- -5 est le minimum de F sur $[-5\,;2]$ tandis que -6 y est un minorant de g.
- 10 est le maximum de F sur $[-5\,;+\infty[$ mais on n'a pas assez d'information pour savoir si F a un minorant ou un minimum sur $[-5\,;+\infty[$.

Exemple 4

Pour la fonction H définie par $\mathrm{H}(x) = 2 - \frac{1}{x}$ pour $x > 0$, comme $-\frac{1}{x} < 0$ pour $x > 0$, $\mathrm{H}(x) < 2$.
Ainsi, 2 est un minorant de H sur $]0\,;+\infty[$ mais n'y est néanmoins pas son maximum car 2 n'a pas d'antécédent par H sur cet ensemble.

II. Lien variation & dérivation

Théorème 1

Pour une fonction f dérivable sur un intervalle I,

- f est décroissante sur I si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$;
- f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$;
- f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$;

Proposition 1

- Une fonction dérivable f dont la dérivée est négative et s'annule en un nombre fini de points sur un intervalle I est strictement décroissante sur I.
- Une fonction dérivable f dont la dérivée est positive et s'annule en un nombre fini de points sur un intervalle I est strictement croissante sur I.

Exemple 5

On étudie les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 1$.
On a $f'(x) = 2 \times 3x^2 + 7 \times 2x + 4 = 6x^2 + 14x + 4$, on étudie le signe de f'.
Le discriminant de f' vaut $14^2 - 4 \times 6 \times 4 = 100$,
les racines de f' sont $\frac{-14-\sqrt{100}}{2\times 6} = -2$ et $\frac{-14+\sqrt{100}}{2\times 6} = -\frac{1}{3}$.
Ainsi,

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		↗	3	↘	$-\frac{44}{27}$	↗	

f est ainsi strictement croissante sur $]-\infty\,;2]$ et sur $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ et est strictement décroissante sur $\left[-2\,;-\frac{1}{3}\right]$.

Définition 4

Pour une fonction f dérivable en x_0, si $f'\left(x_0\right) = 0$, alors $\left(x_0\,;f\left(x_0\right)\right)$ est un **point critique** de f.

Proposition 2

- Pour une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$, si f admet un extremum en x_0, alors f admet un point critique en $\left(x_0\,;f\left(x_0\right)\right)$
- Pour une fonction f dérivable sur un intervalle fermé $[a\,;b]$, elle admet des extrema en a ou en b ou en un autre antécédent où la fonction admet un point critique.

Exemple 6

Pour la fonction cube, on note $c(x) = x^3$.

x	-5		0		5
Signe de $c'(x)$		$+$	0	$+$	
Variations de c	-125	↗	0	↗	125

- La fonction cube a un point critique en $(0\,;0)$ sans que la fonction cube n'ait d'extrema en 0.
- La fonction cube admet des extrama en -5 et 5 sur le fermé $[-5\,;5]$ sans que sa dérivée ne s'y annule.

III. Dérivation d'un produit ou d'un quotient de fonctions

Proposition 3

Pour deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I,
la fonction $u \times v$ est dérivable et : $(uv)' = u'v + uv'$;

Exemple 7

- La fonction ϕ définie par $\phi(x) = x^2\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et
  $\phi'(x) = 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + 0{,}5x\sqrt{x} = 2{,}5x\sqrt{x}$.
- On remarque au passage que comme $\phi'(x) > 0$ pour $x > 0$, ϕ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

N.B. : Pour $x > 0$,
$x^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \frac{x \times x}{\sqrt{x}} = \frac{x \times \sqrt{x}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x \times \sqrt{x}}{1} = x\sqrt{x}$.
On démontre de même que $\frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.

Proposition 4

Si la fonction u est dérivable sur I et $x \in \mathbb{Z}$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et : $\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}$.
En particulier, $\left(u^2\right)' = 2u'u$, $\left(u^3\right)' = 3u'u^2$.

Exemple 8

- La fonction $k\,:\,x \longmapsto (-3x+1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k'(x) = 2 \times (-3)(-3x+1) = 6(3x-1)$.
- La fonction $p\,:\,x \longmapsto (5-x)^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $p'(x) = 3 \times (-1)(5-x)^2 = -3(5-x)^2$.
  Au passage, on remarque que $p'(x) < 0$ pour $x \neq 5$, la fonction p est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 5

Pour deux fonctions u et v dérivables sur un intervalle I, si la fonction v ne s'annule pas sur I,

- alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.
- alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exemple 9

- La fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{7-2x}$ est dérivable sur $]-\infty\,;3{,}5[\cup]3{,}5\,;+\infty[$ et
  $\varphi'(x) = -\frac{-2}{(7-2x)^2} = \frac{2}{(7-2x)^2}$.
  On remarque au passage que comme $\varphi'(x) < 0$ pour $x \neq 3{,}5$, φ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;3{,}5[$ et sur $]3{,}5\,;+\infty[$.
- La fonction ψ définie par $\psi(x) = \frac{5x}{x^2+3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $\psi'(x) = \frac{5 \times (x^2+1) - 5x \times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-5x^2+5}{\left(x^2+1\right)^2}$.

N.B. : Prendre l'habitude de ne pas développer le dénominateur d'une fonction dérivée, cela permet d'étudier plus facilement le signe de la fonction dérivée obtenue.