DEVOIR MAISON 2 : CORRECTION

↠ Exercice 1 : en ces temps de rhinopharyngites

La suite $\left(u_n\right)$ est définie par $\begin{cases} u_0 = 12 \\ u_{n+1} = 0{,}942u_n \end{cases}$.

1. (a) L'algorithme suivant renvoie en sortie la première valeur de n tel que $u_n < 6$. Déterminer cette valeur, en justifiant.

   $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 12$
   Tant que $u \geqslant 6$
       $u \leftarrow 0{,}942u$
       $n \leftarrow n+1$

   Avec des valeurs à 3 chiffres significatifs :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
u_n	12,0	11,3	10,6	10,0	9,45	8,90	8,38	7,89	7,44	7,01	6,60	6,22	5,86

   = 13 est le plus petit entier tel que $u_n < 6$.

   (b) Modifier l'algorithme afin qu'il donne en sortie la plus petite valeur n telle que $u_n < \frac{u_0}{10}$.

   $n \leftarrow 0$
   $u \leftarrow 12$
   Tant que $u \geqslant 1{,}2$
       $u \leftarrow 0{,}942u$
       $n \leftarrow n+1$

2. Écrire une fonction en Python `seuil` :
   - prenant un argument un flottant `p` ;
   - renvoyant le plus petit entier n tel que $u_n <$ `p`.

```python
def seuil(p):
    n = 0
    u = 12
    while u >= p:
        n = n+1
        u = 0.942*u
    return n
```

3. Un patient prend un comprimé contenant 12 mg de pseudoéphédrine. Chaque heure, le corps élimine 5,8 % de la quantité de cette molécule présente dans le corps.

   (a) Justifier que la masse de pseudoéphédrine présente dans le corps est modélisée par la suite $\left(u_n\right)$.
   La prise initiale est de $u_0 = 12$ mg de pseudoéphédrine et une évolution de $-5{,}8$ % amène un coefficient multiplicateur de $1 - 5{,}8\ \% = 0{,}942$, d'où la relation de récurrence $u_{n+1} = 0{,}942u_n$.

   (b) La notice indique qu'au bout de 7 heures, la pseudoéphédrine n'agit plus : quelle masse est encore présente le corps à ce moment-là ?
   La masse est alors de $u_7 \approx 8{,}38$ mg.

(c) Combien d'heures faut-il à l'organisme pour éliminer au moins 50 % de la pseudoéphédrine ingérée ? Même question pour 90 %.
Il faut 13 heures pour que $u_{13} < 6$, puis 39 heures pour que $u_{39} < 1{,}2$.

↠ Exercice 2 : programmation pythonesque « délicate »

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = 0{,}5{v_n}^2 + n \end{cases}$.

1. Calculer v_n pour $n \in [\![1\,;4]\!]$.

n	0	1	2	3	4
v_n	2	1	1,5	2,75	4,375

2. Exprimer v_k en fonction de v_{k-1} pour un nombre entier $k \geqslant 1$.
$\forall k \geqslant 1,\ v_k = 0{,}5{v_{k-1}}^2 + k - 1$
3. Écrire une fonction en Python `v` :
   - prenant un argument un entier `n` ;
   - renvoyant la valeur $v_{\mathtt{n}}$.

```python
def v(n):
    v = 2
    for k in range(n):
        v = 0.5*v**2 + k - 1
    return v
```

↠ Exercice 3 : conjonction de points remarquables

A$(2\,;5)$, B$(-2\,;1)$ et C$(5\,;1)$ sont trois points.

1. (a) Déterminer une équation de la médiatrice du segment [BC].

   La médiatrice $\mathscr{M}$ de [BC] passe par le milieu de [BC] : $A'\left(\frac{-2+5}{2}\,;\frac{1+1}{2}\right) = (1{,}5\,;1)$ et admet $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5-(-2)\\1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

   Pour $M(x\,;y)$, $\overrightarrow{A'M}\begin{pmatrix}x-1{,}5\\y-1\end{pmatrix}$.

   $M \in \mathscr{M} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M}\perp\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{A'M}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

   $M \in \mathscr{M} \Leftrightarrow 7(x-1{,}5)+0(y-1) = 0 \Leftrightarrow x-1{,}5 = 0$.

   (b) Justifier qu'une équation de la médiatrice du segment [AB] est $x+y-3=0$.

   Le milieu de [AC] est $B'(0\,;3)$ et appartient à $\Delta\,:\,x+y-3=0$ car $0+3-3=0$.

   Δ admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal. Or $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\times1-4\times1=0$ donc Δ est perpendiculaire à (AC).

   Ainsi, Δ est bien la médiatrice de [AC] car est perpendiculaire à (AC) et passe par son milieu B'.

   (c) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit Ω au triangle ABC.

   Ω est le point d'intersection de $\mathscr{M}$ et Δ donc ses coordonnées vérifient :

   $$\begin{cases}x-1{,}5=0\\x+y-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1{,}5\\y=3-1{,}5=1{,}5\end{cases}.$$

   Ainsi, $\Omega(1{,}5\,;1{,}5)$.

2. L'orthocentre H du triangle ABC peut être défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega H}$.
   Déterminer les coordonnées du point H.

   Déjà, $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}\begin{pmatrix}(2-1{,}5)+(-2-1{,}5)+(5-1{,}5)\\(5-1{,}5)+(1-1{,}5)+(1-1{,}5)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$.

   Puis, si $H(x\,;y)$, $\Omega H\begin{pmatrix}x-1{,}5\\y-1{,}5\end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\begin{cases}x-1{,}5=0{,}5\\y-2{,}5=1{,}5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$.

   Ainsi, $H(2\,;4)$.

3. Le centre de gravité du triangle ABC est le point $G\left(\frac{5}{3}\,;\frac{7}{3}\right)$.
   Justifier que les points G, H et Ω sont alignés.

   $\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega H}\begin{pmatrix}0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$.

   $\text{dét}\left(\overrightarrow{GH},\overrightarrow{\Omega H}\right) = -\frac{1}{3}\times2{,}5-0{,}5\times\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$.

   Les points G, H et Ω sont donc bien alignés.