DEVOIR SURVEILLÉ I

Exercice 1

Pour chaque situation, modéliser la situation en donnant le terme initial et une relation de récurrence de la suite.

1. En partant de la valeur 4, chaque terme est égal à la somme de 2 et de l'inverse du terme précédent. On note a_n le terme d'indice n.
2. Un opérateur téléphonique enregistre 2 millions d'abonnements le premier mois de l'activation d'un nouveau contrat. Ensuite, chaque mois, 5 % des utilisateurs résilient leur abonnement tandis que 200 000 usagers adoptent cette offre. On note w_n le nombre d'abonnés au n-ème mois.

Exercice 2

Pour chacune des suites suivantes, calculer les trois premiers termes.

$u_n = 3n^2 - n + 2$ $\quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$ $\quad w_n = (-2)^n$ $\quad \begin{cases} z_0 = -1 \\ z_{n+1} = 3z_n + 2n \end{cases}$

Exercice 3

1. La suite (a_n) est définie par $\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_{n+1} = 0{,}3{a_n}^2 - a_n + 0{,}1 \end{cases}$.

   Compléter l'algorithme suivant afin de calculer le terme d'indice n, où $n > 0$ est choisi par l'utilisateur.

   $a \leftarrow \ldots$
   Pour k allant de 1 à n
   $\quad a \leftarrow \ldots$

2. La suite (b_n) est définie par l'algorithme suivant. Sachant que son premier terme est d'indice 0, donner son premier terme et une relation de récurrence.

   $b \leftarrow -3$
   Pour k allant de 1 à n
   $\quad b \leftarrow \frac{k}{b^2}$

Exercice 4

La suite (d_n) est définie pour tout nombre entier naturel $n > 0$ par $d_n = \frac{1}{n} - 3$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} - d_n = \frac{-1}{n(n+1)}$.
2. En déduire le sens de variation de la suite (d_n).

Exercice 5

La suite (q_n) est définie pour tout nombre entier naturel n par $q_n = \frac{1{,}5^n}{n+1}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{3n+3}{2n+4}$.
2. Justifier que $\frac{3n+3}{2n+4} > 1 \Leftrightarrow n > 1$.
3. En déduire que la suite (q_n) est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.