DEVOIR SURVEILLÉ 1 : CORRECTION

Exercice 1

Pour chaque situation, modéliser la situation en donnant le terme initial et une relation de récurrence de la suite.

1. En partant de la valeur 4, chaque terme est égal à la somme de 2 et de l'inverse du terme précédent. On note a_n le terme d'indice n.

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n} \end{cases}.$$

2. Un opérateur téléphonique enregistre 2 millions d'abonnements le premier mois de l'activation d'un nouveau contrat. Ensuite, chaque mois, 5 % des utilisateurs résilient leur abonnement tandis que 200 000 usagers adoptent cette offre. On note w_n le nombre d'abonnés au n-ème mois.

$$\begin{cases} w_0 = 2\,000\,000 \\ w_{n+1} = 0{,}95 w_n + 200\,000 \end{cases}.$$

Exercice 2

Pour chacune des suites suivantes, calculer les trois premiers termes.

$u_n = 3n^2 - n + 2$

$u_0 = 3 \times 0^2 - 0 + 2 = 2.$

$u_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 2 = 4.$

$u_2 = 3 \times 2^2 - 2 + 2 = 12.$

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 2v_n - 3 \end{cases}$$

$v_1 = 2v_0 - 3 = 2 \times 1 - 3 = -1.$

$v_2 = 2v_1 - 3 = 2 \times (-1) - 3 = -5.$

$w_n = (-2)^n$

$w_0 = (-2)^0 = 1.$

$w_1 = (-2)^1 = -2.$

$w_2 = (-2)^2 = 4.$

$$\begin{cases} z_0 = -1 \\ z_{n+1} = 3z_n + 2n \end{cases}$$

$z_1 = 3z_0 + 2 \times 0 = -3 + 0 = -3.$

$z_2 = 3z_1 + 2 \times 1 = -6 + 2 = -4.$

↠ Exercice 3

1. La suite $\left(a_n\right)$ est définie par $\begin{cases} a_0 = 7 \\ a_{n+1} = 0{,}3{a_n}^2 - a_n + 0{,}1 \end{cases}$.

   Compléter l'algorithme suivant afin de calculer le terme d'indice n, où $n > 0$ est choisi par l'utilisateur.

   $a \leftarrow 7$
   Pour k allant de 1 à n
   $\quad a \leftarrow 0{,}3a^2 - a + 0{,}1$

2. La suite $\left(b_n\right)$ est définie par l'algorithme suivant. Sachant que son premier terme est d'indice 0, donner son premier terme et une relation de récurrence.

   $b \leftarrow -3$
   Pour k allant de 1 à n
   $\quad b \leftarrow \frac{k}{b^2}$

   $\begin{cases} b_0 = -3 \\ b_{n+1} = \frac{n+1}{b_n^2} \end{cases}$.

↠ Exercice 4

La suite $\left(d_n\right)$ est définie pour tout nombre entier naturel $n > 0$ par $d_n = \frac{1}{n} - 3$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, d_{n+1} - d_n = \frac{-1}{n(n+1)}$.

   $d_{n+1} - d_n = \left(\frac{1}{n+1} - 3\right) - \left(\frac{1}{n} - 3\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite $\left(d_n\right)$.

   Comme pour tout nombre entier naturel n, $d_{n+1} - d_n < 0$, la suite $\left(d_n\right)$ est décroissante.

↠ Exercice 5

La suite $\left(q_n\right)$ est définie pour tout nombre entier naturel n par $q_n = \frac{1{,}5^n}{n+1}$.

1. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{3n+3}{2n+4}$.

   $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{\frac{1{,}5^{n+1}}{n+2}}{\frac{1{,}5^n}{n+1}} = \frac{1{,}5^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{1{,}5^n}$

   $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{1{,}5^n \times 1{,}5}{1{,}5^n} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{1{,}5n+1{,}5}{n+2} = \frac{3n+3}{2n+4}$.

2. Justifier que $\frac{3n+3}{2n+4} > 1 \Leftrightarrow n > 1$.

   $\frac{3n+3}{2n+4} > 1 \Leftrightarrow 3n + 3 > 2n + 4$ car $2n + 4 > 0$.
   $\Leftrightarrow n > 1$.

3. En déduire que la suite $\left(q_n\right)$ est croissante à partir d'un rang que l'on précisera.

   La suite (q_n) est croissante à partir du rang 1.