Devoir surveillé 2 : correction

↠ Exercice 1 : basico-basique

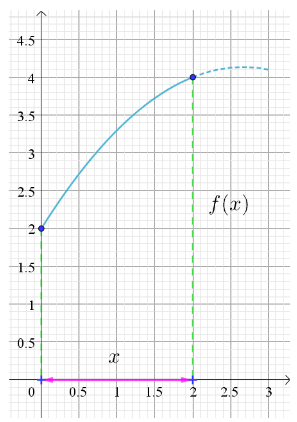
1. Mettre sous forme canonique la fonction d'expression $p(x) = 2x^2 - 7x + 4$.
   $\alpha = -\frac{-7}{2\times 2} = \frac{7}{4}$.
   $\beta = p\left(\frac{7}{4}\right) = -\frac{17}{8}$.
   Ainsi, pour tout nombre réel x, $p(x) = 2\left(x - \frac{7}{4}\right) - \frac{17}{8}$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction d'expression $h(x) = -4(x+1)^2 + 3{,}5$.
   $h(x) = -4(x-(-1))^2 + 3{,}5$.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
Variations de h	↗	$3{,}5$	↘

3. Trois points A, B et C sont tels que $AB = 7$, $AC = 5$ et $\widehat{BAC} = 60°$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
   $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7\times 5\times\cos(60°) = 17{,}5$.
4. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?
   $\vec{u}\cdot\vec{u} = -1\times 8 + 2\times = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont bien orthogonaux.
5. Donner un vecteur directeur et un vecteur normal de la droite d'équation $4x - 6y + 78 = 0$.
   Un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$.

↠ Exercice 2

On modélise la trajectoire d'un ballon qui entre dans un panier lors d'un lancer franc au basket. Cette trajectoire est une parabole d'équation : $y = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2$ où x représente la distance projetée au sol et y la hauteur. Les distances sont exprimées en mètres.
On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}6x + 2$.



1. Établir la forme canonique de $f(x)$.
   $\alpha = -\frac{1{,}6}{2\times(-0{,}3)} = \frac{8}{3}$ et $\beta = f\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{62}{15}$.
2. Quelle hauteur maximale le ballon atteint-il ?
   La hauteur maximale est de $\frac{62}{15} \approx 4{,}1$ m.
3. Sachant que la ligne de lancer franc est à 4,6 mètres du pied du panier, quelle est la hauteur du panier ?
   $f(4{,}6) = 3{,}012$ donc le panier est à hauteur d'à peu près 3 m.

↠ Exercice 3

A$(-9\,;-1)$, B$(-64\,;-16)$ et C$(-7\,;20)$ sont trois points du plan et $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur.

1. Déterminer une équation de la droite (AB).

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-64-(-9)\\-16-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-55\\-15\end{pmatrix}$ dirige (AB).

   Pour un point M$(x\,;y)$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+9\\y+1\end{pmatrix}$.

   $M\in(AB)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ dét$\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right)=0$

   $M\in(AB)\Leftrightarrow -15(x+9)-(-55(y+1))=0\Leftrightarrow -15x+55y-80=0\Leftrightarrow 3x-11y+16=0.$

2. Déterminer une équation de la droite passant par le point C et de vecteur normal $\vec{n}$.

   On note Δ cette droite.

   Pour un point M$(x\,;y)$, $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+7\\y-20\end{pmatrix}$.

   $M\in\Delta\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0$

   $M\in\Delta\Leftrightarrow 2(x-7)+1(y-20)=0\Leftrightarrow 2x+y-6=0.$

   Une équation de Δ est $2x+y-6=0$.

3. Justifier que ces deux droites sont sécantes, puis que leur point d'intersection est le point K$(2\,;2)$.

   Déjà, un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}$ et un vecteur directeur de Δ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

   Comme dét$\left(\overrightarrow{AB},\vec{u}\right)=-55\times2-(-1)\times(-15)-125\neq0$, (AB) et Δ sont sécantes.

   Comme $3\times2-11\times2+6=0$, $K\in(AB)$.

   Comme $2\times2+2-6=0$, $K\in\Delta$.

   Les deux droites sont donc bien sécantes au point K.

↠ Exercice 4

1. Montrer que $-5\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1$ est la forme canonique de la fonction d'expression $q(x)=-5x^2-\frac{10}{3}x+\frac{4}{9}$.

   Pour tout nombre réel x,

   $-5\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+1=-5\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)+1=-5x^2-\frac{10}{3}x-\frac{5}{9}+\frac{9}{9}=-5x^2-\frac{10}{3}x+\frac{4}{9}.$

2. En déduire le tableau de variations de q.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$
Variations de q	$\nearrow$	1	$\searrow$

↠ Exercice 5

L(13 ; 2), M(3 ; −7) et N(16 ; −5) sont trois point du plan.

1. Déterminer une équation de la hauteur issue de L.

   La hauteur, notée h, est la droite passant par L et ayant $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\begin{pmatrix}13\\2\end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

   Pour un point P(x ; y), $\overrightarrow{\mathrm{LP}}\begin{pmatrix}x-13\\y-2\end{pmatrix}$.

   $\mathrm{P} \in h \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{LP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{MN}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{LP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MN}} = 0$

   $\mathrm{P} \in h \Leftrightarrow 13(x-13)+2(y-2)=0 \Leftrightarrow 13x+2y-173=0.$

2. Déterminer une équation de la médiane issue de L.

   On note $\mathrm{L}'\left(\frac{6+13}{2} ; \frac{-7-5}{2}\right) = (9{,}5 ; -6)$ le milieu de [MN].

   La médiane, notée m, est la droite passant par L′ et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{L'L}}\begin{pmatrix}13-9{,}5\\2-(-6)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\8\end{pmatrix}$.

   $\mathrm{P}(x ; y) \in m \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{LP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{LL'}}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ dét$\left(\overrightarrow{\mathrm{LP}},\overrightarrow{\mathrm{LL'}}\right) = 0$

   $\mathrm{P} \in m \Leftrightarrow 8(x-13)-3{,}5(y-2)=0 \Leftrightarrow 8x-3{,}5y-97=0$

↠ Exercice 6

Déterminer m tel que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}5-m\\m\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\20-4m\end{pmatrix}$ soient orthogonaux.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (5-m)\times 3 + m \times (20-4m) = 0$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 3(5-m)+4m(5-m)=0 \Leftrightarrow (3+4m)(5-m)=0$

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \left(m = -\frac{4}{3} \text{ ou } m = 5\right).$