n	**c.** $w_n = 42 - 5{,}3n$	**d.** $t_n = -97 + 11n$
0	42	–97
1	36,7	–86
2	31,4	–75
3	26,1	–64
4	20,8	–53
5	15,5	–42
6	10,2	–31
7	4,9	–20
8	–0,4	–9
9	–5,7	2

71 **a.** $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = n^2$.

$c_0 = 0$; $c_1 = 1$; $c_2 = 4$.

$c_1 - c_0 = 1$ et $c_2 - c_1 = 3$; $c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$ et donc la suite (c_n) n'est pas arithmétique.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = c_{n+1} - c_n$
$= (n+1)^2 - n^2$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$.

Alors, la suite (d_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $d_0 = 1$.

Version guidée

1. a. $c_0 = 0$, $c_1 = 1$, $c_2 = 4$, $c_1 - c_0 = 1$ et $c_2 - c_1 = 3$.

b. $c_1 - c_0 \neq c_2 - c_1$ et donc la suite (c_n) n'est pas arithmétique.

2. a. $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, d_n = c_{n+1} - c_n = n^2 + 2n + 1 - n^2$
$= 2n + 1$.

Alors, la suite (d_n) est arithmétique de raison 2 et de premier terme $d_0 = 1$.

72 **a.** $c_1 = 1$; $c_2 = 5$; $c_3 = 9$.

b. $c_4 = 13$.

Figure 4 :

c. Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*, c_{n+1} = c_n + 4$.

d. La suite (c_n) serait alors arithmétique de raison 4 et de premier terme $c_1 = 1$:

$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$.

$c_n = 6\,789 \Leftrightarrow 4n - 3 = 6\,789$
$\Leftrightarrow 4n = 6\,792$
$\Leftrightarrow n = 1\,698$.

Il est donc bien possible de réaliser une figure avec exactement 6 789 carrés : la figure 1 698.

OBJECTIF 2

Reconnaître et étudier une suite géométrique

73 **a.** Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison – 3,14.

b. Faux.

• Si $u_0 = 0$, alors : $u_1 = 3{,}14$; $u_2 = 6{,}28$; $u_3 = 9{,}42$.

$\frac{u_2}{u_1} = 2$ et $\frac{u_3}{u_2} = 1{,}5$; $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

• Si $u_0 \neq 0$, alors : $u_1 = 3{,}14 + u_0$; $u_2 = 3{,}14 + u_1$.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3{,}14}{u_0} + 1$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3{,}14}{u_1} + 1$; si $\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1}$, alors $u_1 = u_0$, et il y a contradiction, donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

(En fait, la suite (u_n) est arithmétique de raison 3,14.)

c. Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison π.

d. Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison π^2.

e. Faux (en général, si pas de précision sur u_0).

• Si $u_0 = 0$, alors : $u_1 = \pi$. Mais s'il existe un réel q tel que $u_1 = qu_0$, alors il y a contradiction car $u_1 \neq 0$ et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

• Si $u_0 \neq 0$, alors : $u_1 = \pi - u_0$; $u_2 = u_0$. Si (u_n) est une suite géométrique alors il existe un réel q tel que $u_2 = q^2u_0$, et donc dans notre cas : $q^2 = 1$, puis $q = 1$ ou -1. Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ et donc géométrique.

Si $q = -1$, alors on aurait $u_1 = -u_0$, ce qui est contradictoire avec $u_1 = \pi - u_0$ (car $\pi \neq 0$) et donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

f. Vrai, car la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3{,}14}$.

74 On note q, la raison de la suite géométrique (u_n).

a. $q = -\frac{1}{3{,}14}$ **b.** $q = 6$

c. $q = -1$ **d.** $q = 1$

75 On note q, la raison de la suite géométrique (u_n) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$.

$\frac{u_4}{u_2} = q^{4-2} \Leftrightarrow \frac{6}{54} = q^2 \Leftrightarrow q^2 = \frac{1}{9}$.

Alors $q = \frac{1}{3}$ ou $q = -\frac{1}{3}$.

$u_2 = u_0 \times q^2 \Leftrightarrow 54 = \frac{1}{9}u_0 \Leftrightarrow u_0 = 486$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 486 \times q^n$.
$u_3 = u_2 \times q$ donc $u_3 = 18$ ou $u_3 = -18$.
$u_5 = u_4 \times q$ donc $u_5 = 2$ ou $u_3 = -2$.

a. Faux. **b.** Vrai.
c. Faux. **d.** Faux.

76 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8 \times 1{,}5^n$.
$v_1 = 12$; $v_2 = 18$; $v_4 = 40{,}5$.
a. Faux. **b.** Vrai. **c.** Faux.

77 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 8 \times (-0{,}5)^n$.
$v_1 = -4$;$v_2 = 2$; $v_3 = -1$.
a. Faux. **b.** Faux. **c.** Vrai.

78 **1.d.** ; **2.a.** ; **3.c.** ; **4.b.**

79 $u_0 = 4{,}21 > 0$.
1.b. , car $q = 5 > 1$; **2.a.** , car $q = -5 < 0$;
3.c. , car $q = 0{,}5 \in]0 ; 1[$.

80 $u_0 = -4{,}21 < 0$.
1.c. , car $q = 5 > 1$.
2.a. , car $q = -5 < 0$
3.a. , car $q = 0{,}5 \in]0 ; 1[$.

81 La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 1{,}4$ et de premier $a_0 = 5$.
a. $a_1 = 1{,}4 \times a_0 = 1{,}4 \times 5 = 7$;
$a_2 = 1{,}4 \times a_1 = 1{,}4 \times 7 = 9{,}8$;
$a_3 = 1{,}4 \times a_2 = 1{,}4 \times 9{,}8 = 13{,}72$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 5 \times 1{,}4^n$.
c. $a_{12} = 5 \times 1{,}4^{12} \approx 283{,}47$ et
$a_{30} = 5 \times 1{,}4^{30} \approx 121\,007{,}16$.

82 La suite (a_n) est géométrique de raison $q = 0{,}2$ et de premier $a_0 = -7$.
a. $a_1 = 0{,}2 \times a_0 = 0{,}2 \times (-7) = -1{,}4$;
$a_2 = 0{,}2 \times a_1 = 0{,}2 \times (-1{,}4) = -0{,}28$;
$a_3 = 0{,}2 \times a_2 = 0{,}2 \times (-0{,}28) = -0{,}056$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -7 \times 0{,}2^n$.
c. $a_{12} = -7 \times 0{,}2^{12} \approx -2{,}87 \times 10^{-8}$ et
$a_{30} = -7 \times 0{,}2^{30} \approx -7{,}52 \times 10^{-21}$.

83 La suite (a_n) est géométrique de raison $q = -10$ et de premier $a_0 = -2$.
a. $a_1 = -10 \times a_0 = -10 \times (-2) = 20$;
$a_2 = -10 \times a_1 = -10 \times 20 = -200$;
$a_3 = -10 \times a_2 = -10 \times (-200) = 2\,000$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = -2 \times (-10)^n$.
c. $a_{12} = -2 \times (-10)^{12} = -2 \times 10^{12}$ et
$a_{30} = -2 \times (-10)^{30} = -2 \times 10^{30}$.

84 • Pour la suite de l'exercice **81** :
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1{,}4a_n$.
b. $q = 1{,}4 > 1$ et $a_0 = 5 > 0$, donc la suite (a_n) est strictement croissante.
c. Tableau de valeurs à la calculatrice : voir l'exercice **81**.

• Pour la suite de l'exercice **82** :
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0{,}2a_n$.
b. $q = 0{,}2 \in]0 ; 1[$ et $a_0 = -7 < 0$, donc la suite (a_n) est strictement croissante.
c. Tableau de valeurs à la calculatrice : voir l'exercice **82**.

• Pour la suite de l'exercice **83** :
a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = -10a_n$.
b. $q = -10 < 0$ et $a_0 = -2 \neq 0$, donc la suite (a_n) n'est pas monotone.
c. Tableau de valeurs à la calculatrice : voir l'exercice **83**.

85 On note q, la raison de la suite géométrique (b_n) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = b_0 \times q^n$.
$\frac{b_5}{b_2} = q^{5-2} \Leftrightarrow \frac{-0{,}135}{5} = q^3 \Leftrightarrow q^3 = -0{,}027$.
Alors $q = \sqrt[3]{-0{,}027} = -0{,}3$.
$b_2 = q \times b_1 \Leftrightarrow b_1 = \frac{5}{-0{,}3} = -\frac{50}{3}$.
$b_6 = q \times b_5 = -0{,}3 \times (-0{,}135) = 0{,}0405$.

86 **1.** $\frac{23\,000\,000}{53700} \approx 428 > 365$.
En 2017, la maire est déçue, car les habitants de sa commune ont produit en moyenne plus de déchet que la moyenne française.
2.a. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = d_n - \frac{1{,}5}{100}d_n = 0{,}985d_n$.
Alors la suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0{,}985$ et de premier terme $d_0 = 400$.
b. $q = 0{,}985 \in]0 ; 1[$ et $d_0 = 400 > 0$, donc la suite (d_n) est bien strictement décroissante.
c. $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = 400 \times 0{,}985^n$.
d. $2022 = 2018 + 4$.
$d_4 = 400 \times 0{,}985^4 \approx 376{,}53$.
À ce rythme, en 2022, la production de déchets par habitant sera environ de 376 kg.