	A	B	C
1	n	L_n	test
2	1	10	
3	2	7,5	
4	3	5,625	
5	4	4,21875	
6	5	3,1640625	
7	6	2,3730469	
8	7	1,7797852	
9	8	1,3348389	
10	9	1,0011292	
11	10	0,7508469	<1
12	11	0,5631351	<1
13	12	0,4223514	<1
14	13	0,3167635	<1
15	14	0,2375726	<1

La longueur L_n se strictement inférieure à 1 cm à partir de la 10e série.
c. L_n semble se rapprocher de 0.

Objectif 3

Calculer une somme de termes d'une suite particulière

92 Somme des 10 premiers entiers naturels non nuls : $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$.
Réponse **a.**

93 $u_0 + u_1 + \ldots + u_7 = 8 \times \frac{u_0 + u_7}{2}$
$= 8 \times \frac{5 + 26}{2} = 8 \times \frac{31}{2}$
$= 4 \times 31 = 8 \times 15{,}5$.
Réponses **a.** et **d.**

94 $u_8 + u_9 + \ldots + u_{19} = (19 - 8 + 1) \times \frac{10 + (-22)}{2}$
$= 12 \times \frac{10 - 22}{2} = 6 \times (-12)$.
Réponses **a.** et **d.**

95 $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 64 = 1 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^6$
$= \frac{1 - 2^7}{1 - 2}$
$= 2^7 - 1 = 127$.
Réponses **b.** et **d.**

96 $1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 - 0{,}1^3 + 0{,}1^4 - 0{,}1^5$
$= 1 + (-0{,}1) + (-0{,}1)^2 + (-0{,}1)^3 + (-0{,}1)^4 + (-0{,}1)^5$
$= \frac{1 - (-0{,}1)^6}{1 - (-0{,}1)} = \frac{1 - 0{,}1^6}{1 + 0{,}1}$.
Réponse **c.**

97 $v_0 + v_1 + \ldots + v_6 = v_0 \times \frac{1 - 0{,}5^7}{1 - 0{,}5}$
$= 100 \times \frac{1 - 0{,}5^7}{0{,}5}$
$= 200 \times (1 - 0{,}5^7)$
Réponse **c.**

98 $v_3 + v_4 + \ldots + v_9 = v_3 \times \frac{1 - 0{,}5^{9-3+1}}{1 - 0{,}5}$
$= 16 \times \frac{1 - 0{,}5^7}{1 - 0{,}5}$
Réponse **c.**

99 **a.** $1 + 2 + 3 + \ldots + 19 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$.
b. $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = 1275$.
c. On en déduit :
$21 + 22 + \ldots + 50$
$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 50) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 19)$
$= 1275 - 190 = 1085$.

100 Méthode 1 s'inspirant de l'exercice **99** :
$31 + 32 + 33 + \ldots + 79$
$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 79) - (1 + 2 + 3 + \ldots + 30)$
$= \frac{79 \times 80}{2} - \frac{30 \times 31}{2} = 3\,160 - 465 = 2\,695$.
Méthode 2 :
$31 + 32 + 33 + \ldots + 79 = (79 - 31 + 1) \times \frac{31 + 79}{2}$
$= 49 \times 55 = 2\,695$.

101 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 9 + 4n$.
a. $u_{13} = 9 + 4 \times 13 = 61$.
b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{13} = 14 \times \frac{u_0 + u_{13}}{2}$
$= 7 \times (9 + 61) = 490$.

102 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5 - 7n$.
a. $u_{16} = 5 - 7 \times 16 = -107$.
b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_{16} = 17 \times \frac{u_0 + u_{16}}{2}$
$= \frac{17}{2} \times (5 - 107) = -867$.

103 **a.**

```
U ← 3,2
S ← U
Pour n allant de 1 à 19
    U ← U + 2,3
    S ← S + U
Fin Pour
```

b. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def somme():
    U=3.2
    S=U
    for n in range(1,20):
        U=U+2.3
        S=U+S
    return S
```

La fonction renvoie : $S = 501$.

104 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -15{,}8 + 3{,}7n$.

$u_5 = 2{,}7$ et $u_{17} = 47{,}1$.

$$u_5 + u_6 + \ldots + u_{17} = (17 - 5 + 1) \times \frac{u_5 + u_{17}}{2}$$
$$= \frac{13}{2} \times (2{,}7 + 47{,}1) = 323{,}7.$$

105 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-0{,}6)^n \times 25$.

$$\sum_{k=0}^{k=7} v_k = v_0 \times \frac{1-(-0{,}6)^8}{1-(-0{,}6)}$$
$$= 25 \times \frac{1-0{,}6^8}{1+0{,}6} = 15{,}625(1 - 0{,}6^8)$$
$$= 15{,}362\ 56.$$

106 $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1{,}2^n \times 0{,}125$.

$v_3 = 0{,}216$.

$$\sum_{k=3}^{k=18} v_k = v_3 \times \frac{1-1{,}2^{18-3+1}}{1-1{,}2} = 0{,}216 \times \frac{1-1{,}2^{16}}{-0{,}2}$$
$$= -1{,}08(1 - 1{,}2^{16}) = 1{,}08(1{,}2^{16} - 1)$$
$$\approx 18{,}89.$$

107 **a.** On note u_n, le nombre de carreaux utilisés au $n^{\text{ème}}$ tour, avec $n \in \mathbb{N}$: $u_1 = 6$, $u_2 = 12$, $u_3 = 18$.
À chaque tour, il y a six carreaux de plus :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$. Il s'agit de la suite arithmétique de raison 6 et de premier terme $u_1 = 6$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n$.
b. $u_{27} = 6 \times 27 = 162$

$$\sum_{k=1}^{k=27} u_k = 27 \times \frac{u_1 + u_{27}}{2}$$
$$= 27 \times \frac{6 + 162}{2} = 27 \times 84$$
$$= 2\ 268.$$

En n'oubliant pas de compter le carreau central, le carreleur a donc utilisé 2 269 carreaux.

108 **a.** On note u_n, le nombre de points violets et v_n, le nombre de points verts, avec n un nombre entier naturel compris entre 1 et 7.
Alors, d'après ce qu'a écrit Camille :
$u_{n+1} = u_n + 4$ et $v_{n+1} = v_n + 4$.
b. Alors (u_n) et (v_n) sont deux suites arithmétiques de même raison 4, **mais n'ont pas le même premier terme** : $u_1 = 1$ et $v_1 = 3$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 + 4(n - 1)$ et $v_n = 3 + 4(n - 1)$.
$u_7 = 25$ et $v_7 = 27$.
Nombre total de points violets :

$$\sum_{k=1}^{k=7} u_k = 7 \times \frac{u_1 + u_7}{2} = 3{,}5(1 + 25) = 91.$$

Nombre total de points verts :

$$\sum_{k=1}^{k=7} v_k = 7 \times \frac{v_1 + v_7}{2} = 3{,}5(3 + 27) = 105.$$

Il y a donc plus de points verts que de points violets.

109 **1.** $D = 10 + 13 + 16 + \ldots + 145$.

a.

$D \leftarrow 0$
$U \leftarrow 10$
Tant que $U \leqslant$ **145** faire
    $D \leftarrow \boldsymbol{D + U}$
    $U \leftarrow \boldsymbol{U} + 3$
Fin Tant que

b. *Voir le fichier Python ressource dans le manuel numérique enseignant.*

```
def sommeD():
    D=0
    U=10
    while U<=145:
        D=D+U
        U=U+3
    return D
```

La fonction renvoie : $D = 3\ 565$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 10$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10 + 3n$.
a. $u_k = 145 \Leftrightarrow 10 + 3k = 145$

$$\Leftrightarrow k = \frac{145-10}{3} = 45.$$

b. $u_0 + u_1 + \ldots + u_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{i=45} u_i$

$$= 46 \times \frac{u_0 + u_{45}}{2}$$
$$= 46 \times \frac{10 + 145}{2} = 3\ 565.$$

c. On retrouve le résultat de la question **1** ; en effet :
$D = 10 + 13 + 16 + \ldots + 145$
$\quad = 10 + (10 + 3) + (10 + 3 \times 2) + \ldots + (10 + 3 \times 45)$

D'après ce tableau de valeurs, le salaire du contrat B dépasse celui du contrat A au bout de 10 ans.

b. À l'aide d'un tableur, on compare les sommes cumulées tout au long des années.

Voir le fichier Tableur, feuille « comparaison cumuls annuels » dans le manuel numérique enseignant.

- en C3 : = B3*12 ;
- en E3 : = D3*12.

À recopier vers le bas :

- en C4 : =C3 + B4*12
- en E4 : = =E3 + D4*12
- en F3 : =SI(E3>C3;"contrat B";"contrat A") .

	A	B	C	D	E	F
1		Contrat A		Contrat B		
2	*n*	A_n	Cumul annuel A	B_n	Cumul annuel B	Test
3	0	1 600,00	19 200,00	1 300,00	15 600,00	contrat A
4	1	1 670,00	39 240,00	1 378,00	32 136,00	contrat A
5	2	1 740,00	60 120,00	1 460,68	49 664,16	contrat A
6	3	1 810,00	81 840,00	1 548,32	68 244,01	contrat A
7	4	1 880,00	104 400,00	1 641,22	87 938,65	contrat A
8	5	1 950,00	127 800,00	1 739,69	108 814,97	contrat A
9	6	2 020,00	152 040,00	1 844,07	130 943,87	contrat A
10	7	2 090,00	177 120,00	1 954,72	154 400,50	contrat A
11	8	2 160,00	203 040,00	2 072,00	179 264,53	contrat A
12	9	2 230,00	229 800,00	2 196,32	205 620,40	contrat A
13	10	2 300,00	257 400,00	2 328,10	233 557,63	contrat A
14	11	2 370,00	285 840,00	2 467,79	263 171,08	contrat A
15	12	2 440,00	315 120,00	2 615,86	294 561,35	contrat A
16	13	2 510,00	345 240,00	2 772,81	327 835,03	contrat A
17	14	2 580,00	376 200,00	2 939,18	363 105,13	contrat A
18	15	2 650,00	408 000,00	3 115,53	400 491,44	contrat A
19	16	2 720,00	440 640,00	3 302,46	440 120,92	contrat A
20	17	2 790,00	474 120,00	3 500,60	482 128,18	contrat B
21	18	2 860,00	508 440,00	3 710,64	526 655,87	contrat B
22	19	2 930,00	543 600,00	3 933,28	573 855,22	contrat B
23	20	3 000,00	579 600,00	4 169,28	623 886,54	contrat B

D'après ce tableau de valeurs, on peut remarquer que le contrat B, par cumul, devient plus intéressant que le contrat A au bout de 17 ans.

121 $U(0) = 1$ and $U(n) = U(n-1) + n \times (-1)^{n+1}$.

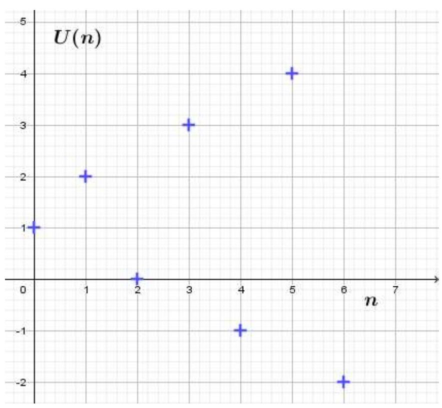
a. The first seven terms are: $U(0) = 1$; $U(1) = 2$; $U(2) = 0$; $U(3) = 3$; $U(4) = -1$; $U(5) = 4$; $U(6) = -2$.

b. $U(1) - U(0) = 1$ and $U(2) - U(1) = -2$.

$U(1) - U(0) \neq U(2) - U(1)$: this is not a arithmetic sequence.

$\frac{U(1)}{U(0)} = 2$ and $\frac{U(2)}{U(1)} = 0$. $\frac{U(1)}{U(0)} \neq \frac{U(2)}{U(1)}$: this is not a geometric sequence.

c.



d. We can deduce a formula for the term of even and odd rank:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U(2n) = 1 - n$ and $U(2n+1) = 2 + n$.

122 **a.** Proportion de filles en 2016 :

$\frac{1}{4} \times 1{,}12 = 0{,}28$, soit 28 %.

b. 2021 = 2015 + 6

Proportion de filles en 2021 : $\frac{1}{4} \times 1{,}12^6 \approx 0{,}493$, soit 49,3 %.

c. Pour tout nombre entier naturel n**,** on note p_n, la proportion de filles l'année 2015 + n.

Pour $n < 10$: $p_{n+1} = 1{,}12 p_n$.

d. On en déduit que la suite (p_n) est géométrique de raison 1,12 et de premier terme $p_0 = \frac{1}{4}$.

2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*

On fournit la fonction en Python suivante :

```
def proportionfilles(t):
    p=0.25
    n=0
    while p<t:
        p=1.12*p
        n=n+1
    return n+2015
```

Alors : `proportion(0.5)`renvoie : `2022`.

En 2022, la proportion de filles sera d'au moins 50 %.

123 **1.a.** La concentration en bactéries augmente de 15 % toutes les 10 minutes, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = 1{,}15 \times c_n$.

La suite (c_n) est donc géométrique de raison $q = 1{,}15$ et de premier terme$c_0 = 5$.

b. D'après **a.** : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1{,}15^n \times 5$.

1 h 30 min = 90 min = 9 × 10 min.

$c_9 = 1{,}15^9 \times 5 \approx 17{,}6$.

c. Plusieurs méthodes possibles pour déterminer au bout de combien de minutes la concentration en bactéries dépasse 20 millions par mL : à l'aide d'un algorithme, à l'aide d'un tableau de valeurs obtenu à la calculatrice ou avec un logiciel tableur, à l'aide d'une résolution d'inéquation par logiciel de calcul formel.

On cherche à trouver le plus petit nombre entier n, tel que : $c_n > 20 \Leftrightarrow 1{,}15^n \times 5 > 20$.

Avec *Xcas* :

```
1 float(solve(5*1.15^x>20)
[x>9.91896890928 ]
```

On trouve : $n = 10$.
La concentration en bactéries dépasse 20 millions par mL au bout de $10 \times 10 = 100$ min, soit encore 1 h 40 min.
2. Il y a des mauvaises bactéries qui rendent malades, mais il y a aussi de « bonnes » bactéries qui servent, par exemple, au traitement des eaux usées ou à la fabrication de produits fromages. Les facteurs pouvant influer sur leur prolifération sont, par exemple, le pH, la température ou la présence de certains gaz (O_2, CO_2).

124 **1.a.** Pour créer un nouvel hexagone, il faut 21 losanges supplémentaires.
b. Pour tout nombre entier naturel n, avec $n \geqslant 2$, on note h_n, le nombre de losanges qu'on ajoute à l'hexagone $n - 1$ pour créer un nouvel hexagone.
On remarque qu'on ajoute un losange de plus à chaque sommet de l'hexagone pour créer le suivant : $h_2 = 9$; $h_3 = 15$; $h_4 = 21$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2, h_{n+1} = h_n + 6$.
La suite (h_n) est arithmétique de raison 6 et de premier terme $h_2 = 9$.
2. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*
Fonction en Python qui compte le nombre de losanges nécessaires pour réaliser l'« hexagone 20 » :

```python
def vasarely():
    h=3
    S=3
    for i in range(2,21):
        h=h+6
        S=S+h
    return S
```

La fonction renvoie : S = 1200.
Remarque :
$h_n = h_2 + 6(n - 2) = 9 + 6n - 12 = 6n - 3$.
Donc $h_{20} = 117$.

$$S = 3 + \sum_{i=2}^{i=20} h_i = 3 + \frac{20-2+1}{2}(h_2 + h_{20})$$

$$= 3 + \frac{19}{2} \times 126 = 1\,200.$$

125 **1.a.** On considère la suite (o_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $o_1 = \frac{1}{2}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, o_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \sum_{k=1}^{k=6} o_k$$

$$= o_1 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^6} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}.$$

b. $1 - \frac{63}{64} = \frac{1}{64}$. La fraction manquante nécessaire pour recréer l'*unité* de l'œil est $\frac{1}{64}$.

2.a. $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{k=n} o_k$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

b. Quand n est de plus en plus grand, S_n semble se rapprocher de 1, c'est-à-dire l'*unité* de l'œil.
3. Dans la mythologie égyptienne, Osiris est le dieu de la mort, aux attributs de pharaon, Isis est son épouse et leur fils est Horus le dieu à tête de faucon. Thot est le dieu des hiéroglyphes, patron des scribes. Seth est le dieu des ténèbres, frère d'Osiris qu'il a tué et qui a son tour a été tué par Horus. La déesse égyptienne des Mathématiques est Seshat ; elle est aussi associée à l'astronomie et à l'architecture.

126 **Version guidée** pour les questions **2. c.** et **e.**
Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n, la quantité d'énergie produite par l'installation durant l'année $2014 + n$.
a. La quantité d'énergie produite en 2014 est :
$20 \times 95 = 1\,900$ kW·h.
La quantité d'énergie diminue de 3 % par an, donc en 2015 elle sera de :
$1\,900 \times 0{,}97 = 1\,843$ kW·h.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{3}{100} u_n = 0{,}97\, u_n$.